<u>Bsp</u> Sei $G = S_3$.

Sei $X = \{1,2,3\}$.

Bsp 144: G operiert auf X

Paare, <u>keine</u> Zykel

Aber G operiert auch auf

$$X \times X = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

via

$$f \cdot (i,j) = (f(i), f(j))$$

Bahnen:

$$G \cdot (1,1) = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

$$G \cdot (1,2) = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$$

$\Rightarrow$ Anzahl der Bahnen ist $k = 2$

Das Fixpunktlemma gibt:

$$|Fix_{id}(X \times X)| = |X \times X| = 9$$

$$|Fix_{(1,2)}(X \times X)| = |\{(3,3)\}| = 1$$

Zykel gemeint

$$|Fix_{(1,3)}(X \times X)| = |\{(2,2)\}| = 1$$

$$|Fix_{(2,3)}(X \times X)| = |\{(1,1)\}| = 1$$

$$|Fix_{(1,2,3)}(X \times X)| = |\emptyset| = 0$$

$$|Fix_{(1,3,2)}(X \times X)| = |\emptyset| = 0$$

Also

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |Fix_f(X \times X)|$$

$$= \frac{1}{6} (9+1+1+1+0+0) = 2.$$

Bsp $G = S_3$

Untergruppen, nach Ordnung sortiert:

Ordnung 1: $1 = \{id\} = \langle\ \rangle$

Ordnung 2: $\langle(1,2)\rangle, \langle(1,3)\rangle, \langle(2,3)\rangle$

Ordnung 3: $\langle(1,2,3)\rangle$

Ordnung 6: S_3

$$v_2(|S_3|) = v_2(6) = 1$$

$$6 = 2^1 \cdot 3^1$$

Die 2-Sylowgruppen sind also die Untergruppen von S_3 von Ordnung 2^1

$$\Rightarrow Syl_2(S_3) = \{\langle(1,2)\rangle, \langle(1,3)\rangle, \langle(2,3)\rangle\}$$

$$v_3(|S_3|) = v_3(6) \overset{\boxed{6 = 2^1 \cdot 3^1}}{=} 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Syl}_3(S_3) = \{\langle(1,2,3)\rangle\}$$

<u>Bsp</u>

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{F}_5^\times, \ b \in \mathbb{F}_5 \right\}$$

$$\leq GL_2(\mathbb{F}_5)$$

$$|G| = 4^2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5^1$$

(1) $v_5(|G|) = 1$

Die 5-Sylowgruppen von G sind also die Untergruppen ...

... von G von Ordnung $5^1 = 5$.

z.B. ist

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{F}_5 \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \in \mathrm{Syl}_5(G)$$

(2) $v_2(|G|) = 4$

Die 2-Sylowgruppen von G sind also die Untergruppen von G von Ordnung $2^4 = 16$

z.B. ist

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{F}_5^\times \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \in \mathrm{Syl}_2(G)$$

Ferner ist für $x := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

auch ${}^{x}Q = x\,Q\,x^{-1} \in \mathrm{Syl}_2(G)$

Denn $\varphi : G \to G : g \mapsto {}^{x}g$

ist ein Automorphismus von G

(genauer, ein innerer Automorphismus von G), und ein solcher

bildet eine Untergruppe

auf eine Untergruppe gleicher

Ordnung ab:

$|{}^{x}Q| = |Q| = 16$