__Bsp__ Es ist

$$X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

für

$$G := \langle \underbrace{(1,2,4)(3,6)}_{f} \rangle$$

$$= \{ \underbrace{id}_{f^0}, \underbrace{(1,2,4)(3,6)}_{f^1}, \underbrace{(1,4,2)}_{f^2}, \underbrace{(3,6)}_{f^3}, \underbrace{(1,2,4)}_{f^4}, \underbrace{(1,4,2)(3,6)}_{f^5} \}$$

eine G-Menge via Anwendung.

(1) Bahn von $1 \in X$:

$$G.1 = \{1, 2, 4\} \subseteq X$$

Stabilisator von $1 \in X$ in G:

$$\mathrm{Stab}_G(1) = \{f^0, f^3\} = \langle f^3 \rangle.$$

Bahnenlemma: G-Bijektion

$$G / \mathrm{Stab}_G(1) \xrightarrow{\sim} G \cdot 1$$
$$f^i \cdot \mathrm{Stab}_G(1) \longmapsto f^i \cdot 1$$

Also:

$$\langle f \rangle / \langle f^3 \rangle \xrightarrow{\sim} \{1, 2, 4\}$$

$$f^0 \cdot \langle f^3 \rangle \longmapsto f^0 \cdot 1 = 1$$

$$f^1 \cdot \langle f^3 \rangle \longmapsto f^1 \cdot 1 = 2$$

$$f^2 \cdot \langle f^3 \rangle \longmapsto f^2 \cdot 1 = 4$$

das sind alle, man beachte

$$|\langle f \rangle / \langle f^3 \rangle| = |\langle f \rangle| / |\langle f^3 \rangle|$$
$$= 6/2 = 3$$

(2) Bahn von $3 \in X$:

$$G \cdot 3 = \{3, 6\} \subseteq X$$

Stabilisator von $3 \in X$ in G:

$$\mathrm{Stab}_G(3) = \{f^0, f^2, f^4\}$$
$$= \langle f^2 \rangle$$

Bahnenlemma: G-Bijektion

$$G/\mathrm{Stab}_G(3) \xrightarrow{\sim} G \cdot 3$$
$$f^i \cdot \mathrm{Stab}_G(3) \longmapsto f^i \cdot 3$$

Also:

$$\langle f \rangle / \langle f^2 \rangle \longrightarrow \{3, 6\}$$
$$f^0 \cdot \langle f^2 \rangle \longmapsto f^0 \cdot 3 = 3$$
$$f^1 \cdot \langle f^2 \rangle \longmapsto f^1 \cdot 3 = 6$$

(3) Bahn von $5 \in X$:

$$G.5 = \{5\},$$

$$\mathrm{Stab}_G(5) = G$$

Bahnenlemma:

$$G/\mathrm{Stab}_G(5) \xrightarrow{\sim} G.5$$

Also:

$$\langle f\rangle/\langle f\rangle \longrightarrow \{5\}$$

$$f^0.\langle f\rangle \longmapsto f^0.5 = 5$$

Es kann also Bahnen der Länge 1 geben, falls für das Element x darin gilt:

$$g.x = x \text{ für } g \in G.$$

<u>Bsp</u> Sei $p \geq 2$ prim.

$$G := GL_2(\mathbb{F}_p)$$

$$X := \mathbb{F}_p^{2\times 1}$$

Via Matrixmultiplikation ist X eine G-Menge

$$\underbrace{g}_{2\times 2} \cdot \underbrace{x}_{2\times 1} = \underbrace{g\cdot x}_{2\times 1}$$

Bahn:

$$G\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left\{ g\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} : g \in GL_2(\mathbb{F}_p)\right\}$$

$$= \mathbb{F}_p^{2\times 1} \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Stabilisator:

$$\mathrm{Stab}_G\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{ g \in GL_2(\mathbb{F}_p) : g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}1 & b\\0 & d\end{pmatrix} : b \in \mathbb{F}_p,\ d \in \mathbb{F}_p^\times \right\}$$

Bahnenlemma:

$$G / \mathrm{Stab}_G\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\sim} G \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Linke Seite:

$$\left| G / \mathrm{Stab}_G\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \right| = (p^2-1)(p^2-p) / (p \cdot (p-1))$$

$$= (p+1)(p-1) = p^2-1$$

Rechte Seite:

$$\left| G \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right| = \left| \mathbb{F}_p^{2\times 1} \setminus \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\} \right|$$

Passt. $= p^2-1$