Bsp

Cayley für $C_3 = \{1, a, a^2\}$ mit $a^3 = 1$: Injektiver Gruppenmorphismus

$$\varphi : C_3 \longrightarrow S_{C_3}$$

$$1 \longmapsto \left\{\begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \cdot 1 \\ a \mapsto 1 \cdot a \\ a^2 \mapsto 1 \cdot a^2 \end{array}\right\} = id_{C_3}$$

$$a \longmapsto \left\{\begin{array}{l} 1 \mapsto a \cdot 1 = a \\ a \mapsto a \cdot a = a^2 \\ a^2 \mapsto a \cdot a^2 = 1 \end{array}\right\} = \underbrace{(1, a, a^2)}_{\text{Zykelschreibweise}}$$

$$a^2 \longmapsto \left\{\begin{array}{l} 1 \mapsto a^2 \cdot 1 = a^2 \\ a \mapsto a^2 \cdot a = 1 \\ a^2 \mapsto a^2 \cdot a^2 = a \end{array}\right\} = \underbrace{(1, a^2, a)}_{\text{Zykelschreibweise}}$$

Übrigens: Die Bijektion

$$\{1, a, a^2\} \xrightarrow{\beta} \{1, 2, 3\}$$

$$1 \longmapsto 1$$

$$a \longmapsto 2$$

$$a^2 \longmapsto 3$$

...

... gibt den Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} S_{C_3} &\xrightarrow[\sim]{\psi} S_3 \\ \sigma &\longmapsto \beta \circ \sigma \circ \beta^{-1} \end{aligned}$$

z. B.

$$\overbrace{(1, a, a^2)}^{\sigma} \overset{\psi}{\longmapsto} \beta \circ \overbrace{(1, a, a^2)}^{\sigma} \circ \beta^{-1} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \overset{\beta^{-1}}{\longmapsto} 1 \overset{\sigma}{\longmapsto} a \overset{\beta}{\longmapsto} 2 \\ 2 \overset{\beta^{-1}}{\longmapsto} a \overset{\sigma}{\longmapsto} a^2 \overset{\beta}{\longmapsto} 3 \\ 3 \overset{\beta^{-1}}{\longmapsto} a^2 \overset{\sigma}{\longmapsto} 1 \overset{\beta}{\longmapsto} 1 \end{array} \right)$$

Also kurz:

$$(1, a, a^2) \overset{\psi}{\longmapsto} (1, 2, 3)$$

Ähnlich:

$$\mathrm{id}_{C_3} \overset{\psi}{\longmapsto} \mathrm{id}$$

$$(1, a^2, a) \overset{\psi}{\longmapsto} (1, 3, 2)$$

31.05.21-3

Zusammengesetzt mit φ von Cayley erhalten wir den injektiven Gruppenmorphismus:

$$\begin{tikzcd} C_3 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "\psi\circ\varphi"] & S_{C_3} \arrow[r, "\psi", "\sim"'] & S_3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longmapsto & \mathrm{id}_{C_3} & \longmapsto & \mathrm{id} \\ a & \longmapsto & (1, a, a^2) & \longmapsto & (1,2,3) \\ a^2 & \longmapsto & (1, a^2, a) & \longmapsto & (1,3,2) \end{array}$$

Nachbemerkungen:

- Ein anderes β gibt ein anderes ψ.
- ψ ist Gruppenmorphismus:

  Für $\sigma, \sigma' \in S_{C_3}$ wird

  $$\psi(\sigma)\circ\psi(\sigma') = \beta\circ\sigma\circ\cancel{\beta^{-1}}\circ\cancel{\beta}\circ\sigma'\circ\beta^{-1}$$
  $$= \beta\circ\sigma\circ\sigma'\circ\beta^{-1} = \psi(\sigma\circ\sigma')$$

- φ ist bijektiv: Die Umkehrabbildung ist

$$S_{C_3} \xleftarrow{\varphi^{-1}} S_3$$
$$\beta^{-1} \circ f \circ \beta \longleftarrow\!\!| \; f$$

<u>Bsp</u> Es ist

$$V = \{ id, \underbrace{(1,2)(3,4)}_{f_1}, \underbrace{(1,3)(2,4)}_{f_2}, \underbrace{(1,4)(2,3)}_{f_3} \} \trianglelefteq S_4$$

Also haben wir die Operation

$$S_4 \longrightarrow S_V$$
$$g \longmapsto (f \longmapsto {}^g f)$$

Es ist $\{f_1, f_2, f_3\} =: W$

eine S_4 - Teilmenge von V:

Konjugation bewahrt den

Zykeltyp $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$.

Also haben wir die Operation

$$\begin{aligned} \varphi : S_4 &\longrightarrow S_W \\ g &\longmapsto (f \longmapsto {}^g f) \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß φ surjektiv

ist:

$$\varphi(id) = id_W$$

$$\varphi((1,2)) = \begin{cases} f_1 = (1,2)(3,4) \longmapsto {}^{(1,2)}(1,2)(3,4) = f_1 \\ f_2 = (1,3)(2,4) \longmapsto {}^{(1,2)}(1,3)(2,4) = f_3 \\ f_3 = (1,4)(2,3) \longmapsto {}^{(1,2)}(1,4)(2,3) = f_2 \end{cases}$$

$$= \underbrace{(f_2, f_3)}_{\text{Zykelschreibweise}}$$

$$\varphi((2,3)) = \begin{cases} f_1 = (1,2)(3,4) \longmapsto {}^{(2,3)}(1,2)(3,4) = f_2 \\ f_2 = (1,3)(2,4) \longmapsto {}^{(2,3)}(1,3)(2,4) = f_1 \\ f_3 = (1,4)(2,3) \longmapsto {}^{(2,3)}(1,4)(2,3) = f_3 \end{cases}$$

$$= \underbrace{(f_1, f_2)}_{\text{Zykelschreibweise}}$$

Und $\varphi(S_4) \supseteq \varphi(\langle (1,2), (2,3) \rangle)$

$$= \langle \varphi((1,2)), \varphi((2,3)) \rangle = \ldots$$

$$\ldots = \langle (f_2, f_3), (f_1, f_2) \rangle$$

$$= S_W$$

Also $\varphi(S_4) = S_W$.

Da V abelsch ist, ist

$$V \leq \mathrm{Kern}(\varphi).$$

Es ist $|V| = 4$. Ferner ist

$$6 = |S_W| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Homomorphiesatz}}}{=} |S_4/\mathrm{Kern}(\varphi)|$$

$$= |S_4| / |\mathrm{Kern}(\varphi)|$$

$$= 24 / |\mathrm{Kern}(\varphi)|$$

Also $|\mathrm{Kern}(\varphi)| = 4$.

Also $V = \mathrm{Kern}(\varphi)$.

Schließlich gibt die Bijektion

$$\begin{aligned} \beta : W &\longrightarrow \{1,2,3\} \\ f_1 &\longmapsto 1 \\ f_2 &\longmapsto 2 \\ f_3 &\longmapsto 3 \end{aligned}$$

den Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \eta : S_W &\longrightarrow S_3 \\ \sigma &\longmapsto \beta \circ \sigma \circ \beta^{-1} \end{aligned}$$

Zusammen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & S_4 \arrow[r, "\varphi"', "\text{surj.}"] \arrow[rr, bend right, "\eta \circ \varphi"', "\text{surj.}"'] & S_W \arrow[r, "\eta", "\sim"'] & S_3 \\ V & & & \end{tikzcd}$$

Der Homomorphiesatz, angewandt auf den surjektiven Gruppenmorphismus $\psi \circ \varphi$, gibt den Gruppenisomorphismus

$$S_4/V \xrightarrow[\sim]{\overline{\psi \circ \varphi}} S_3$$

$$fV \longmapsto \psi(\varphi(f))$$

z.B.

$$(1,2)V \longmapsto (2,3)$$

↑ s.o.

$$(2,3)V \longmapsto (1,2)$$

↑ s.o.

$$(3,4)V \longmapsto (2,3)$$

↑ ähnliche Rechnung