__Bsp__ Wir betrachten in S_4:

$$f := (1,2)(3,4)$$

$$g := (1,3)(2,4)$$

$$h := (1,4)(2,3)$$

Es ist $V := \{id, f, g, h\} \leq S_4$:

Dazu stellen wir fest:

$f = f^{-1}$, $g = g^{-1}$, $h = h^{-1}$

Ferner ist:

$(\circ)$	id	f	g	h
id	id	f	g	h
f	f	id	h	g
g	g	h	id	f
h	h	g	f	id

$f \circ g$
$= (1,2)(3,4) \circ (1,3)(2,4)$
$= (1,4)(2,3) = h$

$g \circ h$
$= (1,3)(2,4) \circ (1,4)(2,3)$
$= (1,2)(3,4) = f$

$h = h^{-1} \overset{\text{s.o.}}{=} (f \circ g)^{-1}$
$= g^{-1} \circ f^{-1} = g \circ f$

Daraus folgt nicht nur $V \leq S_4$,

sondern auch V abelsch

Ferner ist V die kleinste

Untergruppe, die f, g, h enthält

$$\Rightarrow V = \langle f, g, h \rangle$$

$$\overset{f \circ g = h}{=} \langle f, g \rangle$$

$$\overset{\text{ähnlich}}{=} \langle f, h \rangle$$

$$= \langle g, h \rangle$$

Aber f, g, h haben Ordnung 2

Ordnung 2 $\Rightarrow$ es gibt in V_4

kein Element der Ordnung 4

$\Rightarrow$ V ist <u>nicht</u> zyklisch

Bsp Sei $z \in \mathbb{Z}$:

$p = 2$: $z^2 - z = z(z-1) \equiv_2 0$

$p = 3$: $z^3 - z = z(z-1)(z+1) \equiv_3 0$

$p = 5$: $z^5 - z = z(z^2-1)(z^2+1)$

$= z(z-1)(z+1)(z^2+1)$

$\equiv_5 0$

Das ist schon nicht mehr offensichtlich. Bsp:

z	0	1	2	3	4	5
$z^5 - z$	0	0	30	240	1020	3120

alle $\equiv_5 0$

Bsp

(1) Sei G abelsch.

Sei $U \leqslant G$.

Dann ist $U \trianglelefteq G$.

(2) Es ist

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q}) : a, b, d \in \mathbb{Q}, \ ad \neq 0 \right\}$$

$\leqslant GL_2(\mathbb{Q})$

Es ist

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q}) : s \in \mathbb{Q} \right\}$$

$\trianglelefteq U$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b+sd \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b+a^{-1}sd - a^{-1}bd^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}sd \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$$