

Bsp

(1)  $U(\mathbb{Z}) = \{-1, +1\}$  ist  
eine abelsche Gruppe von Ordnung  
 $|U(\mathbb{Z})| = 2$

(2)  $U(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^*$  ist eine abelsche  
Gruppe von Ordnung  
 $|U(\mathbb{Q})| = \infty$

(3)  $U(\mathbb{Z}/(8)) = \{1, 3, -1, -3\}$   
ist eine abelsche Gruppe  
von Ordnung  $|U(\mathbb{Z}/(8))| = 4$

(4)  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$  ist eine additiv  
geschriebene abelsche Gruppe  
von Ordnung  $|\mathbb{Z}| = \infty$ .

Bsp Es ist

$$GL_2(\mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{2 \times 2} : ad - bc \neq 0 \right\}$$

Es ist

$$\begin{aligned} |GL_2(\mathbb{F}_3)| &= (3^2 - 1)(3^2 - 3) \\ &= 8 \cdot 6 = 48 \end{aligned}$$

Es ist  $GL_2(\mathbb{F}_3)$  eine  
nicht abelsche Gruppe:

$$\text{Es sind } g := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } h := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in  $GL_2(\mathbb{F}_3)$ . Es ist:

$$g \cdot h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq$$

Bsp Wir listen die Elemente

von  $S_4$  auf. Es ist  $|S_4| = 4! = 24$ .

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 4 \end{pmatrix} = \text{id}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 4 \end{pmatrix} = (1,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 4 \end{pmatrix} = (1,3,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 3 \end{pmatrix} = (1,4,3,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 3 \end{pmatrix} = (3,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 3 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 2 \end{pmatrix} = (1,3,4,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 2 \end{pmatrix} = (1,4,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 4 \end{pmatrix} = (2,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \end{pmatrix} = (1,2,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 4 \end{pmatrix} = (1,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 3 \end{pmatrix} = (1,4,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 2 \end{pmatrix} = (2,3,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 1 \end{pmatrix} = (1,2,3,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 4 \\ 4 \mapsto 1 \end{pmatrix} = (1,3,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 1 \end{pmatrix} = (1,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 3 \end{pmatrix} = (2,4,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 3 \end{pmatrix} = (1,2,4,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 2 \end{pmatrix} = (1,3)(2,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \\ 4 \mapsto 2 \end{pmatrix} = (1,4,2,3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 2 \end{pmatrix} = (2,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 1 \end{pmatrix} = (1,2,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 4 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 1 \end{pmatrix} = (1,3,2,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \\ 4 \mapsto 1 \end{pmatrix} = (1,4)(2,3)$$

Nach Zykeltyp sortiert wird also:

$$S_4 = \left\{ \begin{array}{l} \text{id}, \\ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), \\ (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), \\ (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3), \\ (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), \\ (1,4,2,3), (1,4,3,2), \\ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \end{array} \right\}$$

Man beachte:  $(1,2,4) = (2,4,1) = (4,1,2)$

und so weiter

man normalisiert:

der kleinste Eintrag vorne

Beispielrechnungen in  $S_4$ :

$$\begin{aligned} (1,2,3,4)^2 &= (1,2,3,4) \circ (1,2,3,4) \\ &= (1,3)(2,4) \end{aligned}$$

$$(1,2,3) \circ (2,3,4) = (1,2)(3,4)$$

$$(1,2,3) \circ (3,4) = (1,2,3,4)$$

$$(1,2) \circ (3,4) = (1,2)(3,4)$$

$$(3,4) \circ (1,2) = (1,2)(3,4)$$

$$(1,2)(3,4) \circ (1,3)(2,4) = (1,4)(2,3)$$

$$(1,2) \circ (2,3) \circ (3,4) = (1,2,3,4)$$

$$(2,3) \circ (1,2,3,4) \circ (2,3) = (1,3,2,4)$$