Bsp (1) In $\mathbb{Z}$:

$$18 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 11^0$$

$$66 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 11^1$$

Also:

ggT(18, 66)

$$= 2^{\min\{1,1\}} \cdot 3^{\min\{2,1\}} \cdot 11^{\min\{0,1\}}$$

$$= 2^1 \cdot 3^1 \cdot 11^0$$

$$= 6$$

(2) In $\mathbb{Q}[X]$:

$$X^4 + X^2 = X^2 \cdot (X^2+1)^1$$

$$X^4 + 2X^2 + 1 = X^0 \cdot (X^2+1)^2$$

Also:

$$ggT(X^4+X^2,\ X^4+2X^2+1)$$

$$= X^{\min\{2,0\}} \cdot (X^2+1)^{\min\{1,2\}}$$

$$= X^0 \cdot (X^2+1)^1$$

$$= X^2+1,$$

(3) In $\mathbb{Q}[X,Y]$:

$$ggT(X,Y) = 1$$

<u>Bsp</u> (1) In $\mathbb{Z}$:

$$(18,66) = (6)$$

Beachte: $6 = 18 \cdot 4 + 66 \cdot (-1)$

(2) In $\mathbb{Q}[X]$:

$$(X^4+X^2,\ X^4+2X^2+1) = (X^2+1)$$

(3) In $\mathbb{Q}[X,Y]$

$$(X,Y) \neq (1)$$

Aber $\mathbb{Q}[X,Y]$ ist auch kein ~~Haupt~~idealbereich

<u>Bsp</u>

(1) Es ist $\mathbb{Z}$ ein euklidischer Ring. Wir können also $ggT(18,66)$ mit Bem 68 bestimmen:

- $66 = 18 \cdot 3 + 12$

$$\Longrightarrow ggT(18,66) = ggT(12,18)$$

- $18 = 12 \cdot 1 + 6$

  $\Rightarrow \operatorname{ggT}(12, 18) = \operatorname{ggT}(6, 12)$

- $12 = 6 \cdot 2 + 0$

  $\Rightarrow \operatorname{ggT}(6, 12) = \operatorname{ggT}(0, 6) = 6$

Also: $\operatorname{ggT}(18, 66) = 6$

(2) Es ist $\mathbb{Q}[X]$ ein euklidischer Ring. Wir können also $\operatorname{ggT}(X^4+2X^2+1, X^4+X^2)$ unter Verwendung von Bem 68 berechnen:

- $X^4 + X^2 = (X^4 + 2X^2 + 1) \cdot 1 + (-X^2 - 1)$

$\Rightarrow \operatorname{ggT}(X^4 + 2X^2 + 1, X^4 + X^2)$

$= \operatorname{ggT}(-X^2 - 1, X^4 + 2X^2 + 1)$

- $X^4 + 2x + 1 = (-X^2 - 1) \cdot (-X^2 - 1) + 0$

$$\Rightarrow \operatorname{ggT}(-X^2 - 1,\ X^4 + 2X^2 + 1)$$

$$= \operatorname{ggT}(0,\ \underbrace{-X^2 - 1}_{(-1)\cdot(X^2+1)})$$

$$= X^2 + 1$$

Insgesamt:

$$\operatorname{ggT}(X^4 + 2X^2 + 1,\ X^4 + X^2) = X^2 + 1$$