Bsp

(1) Es ist $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealbereich

und also faktoriell.

Wir haben z. B. die Primfaktorzerlegung

$$-60 = \underbrace{(-1)}_{\in U(\mathbb{Z})} \cdot \underbrace{\underbrace{2}_{p_1} \cdot \underbrace{2}_{p_2} \cdot \underbrace{3}_{p_3} \cdot \underbrace{5}_{p_4}}_{\text{alle prim}}$$

(2) Es ist $\mathbb{F}_5[X]$ ein Hauptidealbereich

und also faktoriell.

Wir haben z. B. die Primfaktorzerlegung ...

$$\ldots \quad 2X^4+X^2 = \underbrace{2}_{u} \cdot \underbrace{\underbrace{X}_{p_1} \cdot \underbrace{X}_{p_2} \cdot \underbrace{(X^2+3)}_{p_3}}_{\text{alle prim}}$$

$\in \mathcal{U}(\mathbb{F}_5[X])$

X^2+3 prim, da irreduzibel: ein Teiler, der keine Einheit ist, wäre von Grad 1 und hätte eine Nullstelle von X^2+3 in $\mathbb{F}_5$ zur Folge.

Aber: Durchprobieren von $-2, -1, 0, 1, 2$ gibt, daß X^2+3 keine Nullstelle in $\mathbb{F}_5$ hat.

(3) In $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ hat

2 keine Primfaktorzerlegung:

- $2 \notin U(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}])$

- 2 ist in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nicht prim

- Unter den Teilern von 2, nämlich $-1, +1, -2, +2$, ist kein Primelement.

Cf. Bsp. 52.(4), 56.(3)

Bsp

(1) Sei $R = \mathbb{Z}$. Dann ist

$$K = \mathrm{Quot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}.$$

Es ist z.B.

$$v_3(18) = v_3(2^1 \cdot 3^2) = 2$$

$$v_3\left(-\frac{5}{54}\right) = v_3\left(-2^{-1} \cdot 3^{-3} \cdot 5^1\right) = -3$$

$$v_3(7) = 0 \longleftarrow \text{"3 taucht nicht auf"}$$

$$v_3(0) = +\infty$$

(2) Sei $R = \mathbb{F}_5[X]$.

Es ist z.B.

$$X^3 - X = X(X-1)(X+1).$$

Ferner ist $X^2 + 2$ prim.

Also z.B.:

$$v_X(X^3-X) = 1$$

$$v_{X+1}(X^3-X) = 1$$

$$v_{X^2+2}(X^3-X) = 0$$

$$v_{X^2+2}\left(\frac{X^3-X}{(X^2+2)^2(X+2)}\right) = -2$$