Klausur zur Algebra für Lehramt

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- **Antworten sind zu begründen.** Nachvollziehbare Rechnungen zählen als Begründungen.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.10.2021** im Campus-System bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.10.2021** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Man bestimme ein $a \in \mathbb{Z}$ und einen Ringisomorphismus

$$\varphi \;:\; \mathbb{Z}/(a) \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{Z}/(7) \times \mathbb{Z}/(8)\;.$$

Man bestimme die Abbildungsvorschrift für φ^{-1}.

Lösung. Es ist $(7) + (8) = \mathbb{Z}$. Es ist $(7) \cap (8) = (56)$. Sei dementsprechend $a := 56$.

Dann gibt es nach dem Chinesischen Restsatz den Ringisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \varphi \;:\; \mathbb{Z}/(56) & \stackrel{\sim}{\to} & \mathbb{Z}/(7) \times \mathbb{Z}/(8) \\ x + (56) & \mapsto & (x + (7), x + (8)) \end{array} .$$

Um eine Abbildungsvorschrift für φ^{-1} zu finden, benötigen wir ein Urbild unter φ des Elements $(r + (7), s + (8)) \in \mathbb{Z}/(7) \times \mathbb{Z}/(8)$, wobei $r,\ s\ \in \mathbb{Z}$. Da φ surjektiv ist, gibt es dieses Urbild, und da φ injektiv ist, ist es eindeutig.

Wir bestimmen zunächst Urbilder von $(1 + (7), 0 + (8))$ und $(0 + (7), 1 + (8))$.

Es ist

$$\varphi(x + (56)) = (x + (7), x + (8)) \stackrel{!}{=} (1 + (7), 0 + (8)),$$

falls x durch 8 teilbar ist, und beim Teilen durch 7 Rest 1 bleibt. Wir können $x = 8$ nehmen.

Es ist

$$\varphi(y + (56)) = (y + (7), y + (8)) \stackrel{!}{=} (0 + (7), 1 + (8)),$$

falls y durch 7 teilbar ist, und beim Teilen durch 8 Rest 1 bleibt. Wir können $y = -7$ nehmen.

Nun ist

$$\begin{array}{rl} & \varphi(8 \cdot r + (-7) \cdot s + (56)) \\ = & \varphi(8 \cdot r - 7 \cdot s + (56)) \\ = & (8 \cdot r - 7 \cdot s + (7),\ 8 \cdot r - 7 \cdot s + (8)) \\ = & (r + (7), s + (8))\;. \end{array}$$

Also ist

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1} \;:\; \mathbb{Z}/(7) \times \mathbb{Z}/(8) & \to & \mathbb{Z}/(56) \\ (r + (7), s + (8)) & \mapsto & 8 \cdot r - 7 \cdot s + (56)\;. \end{array}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[X]/(X^2+1)$. Sei $\iota := X + (X^2+1)$. Dann ist $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\iota)$ und $\iota^2 = -1$.

Man bestimme ein Element $y \in \mathbb{F}_9$ mit $\mathrm{U}(\mathbb{F}_9) = \langle y \rangle$.

Für dieses Element y bestimme man das Minimalpolynom $\mu_{y,\mathbb{F}_3}(X)$.

Lösung. Es ist $(1, \iota)$ eine $\mathbb{F}_3$-lineare Basis von $\mathbb{F}_9$. Es ist $\mathrm{U}(\mathbb{F}_9) \simeq \mathrm{C}_8$.

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} (\iota+1)^2 & = & \iota^2 + 2\iota + 1 = -\iota \\ (\iota+1)^4 & = & (-\iota)^2 = -1 \\ (\iota+1)^8 & = & 1\ . \end{array}$$

Somit ergibt sich für $y := \iota + 1$, dass $\mathrm{U}(\mathbb{F}_9) = \langle y \rangle$ ist.

Es ist $y^0 = 1$. Es ist $y^1 = 1 + \iota$. Es ist $y^2 = -\iota$. Also ist $y^2 + y - 1 = 0$.

Da (y^0, y^1) linear unabhängig ist über $\mathbb{F}_3$, ist y keine Nullstelle eines normierten Polynoms von Grad 1.

Da $m(X) := X^2 + X - 1$ normiert ist und von minimalem Grad ist mit $m(y) = 0$, folgt

$$\mu_{y,\mathbb{F}_3}(X) \ = \ m(X) \ = \ X^2 + X - 1\ .$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(1) Bestimmen Sie $\varphi(60)$.

Besitzt $\mathbb{Q}(\zeta_{60})$ einen Teilkörper Z mit $[Z:\mathbb{Q}]=3$?

(2) Bestimmen Sie das Kreisteilungspolynom $\Phi_9(X)$.

Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\zeta_9):\mathbb{Q}(\zeta_3)]$ und das Minimalpolynom $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}(\zeta_3)}(X)$.

Lösung.

(1) Es ist $\varphi(60)=\varphi(2^2\cdot 3\cdot 5)=\varphi(2^2)\cdot\varphi(3)\cdot\varphi(5)=2\cdot 2\cdot 4=16$.

Es ist $[\mathbb{Q}(\zeta_{60}):\mathbb{Q}]=\varphi(60)=16$.

Annahme: Es gibt einen Teilkörper Z in $\mathbb{Q}(\zeta_{60})$ mit $[Z:\mathbb{Q}]=3$. Dann ist

$$16=[\mathbb{Q}(\zeta_{60}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\zeta_{60}):Z][Z:\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\zeta_{60}):Z]\cdot 3\ .$$

Widerspruch.

Somit gibt es keinen solchen Teilkörper.

(2) Es ist $X^9-1=\Phi_1(X)\cdot\Phi_3(X)\cdot\Phi_9(X)$. Mit $X^3-1=\Phi_1(X)\cdot\Phi_3(X)$ folgt

$$\Phi_9(X)=\frac{X^9-1}{X^3-1}=X^6+X^3+1\ .$$

Es ist $[\mathbb{Q}(\zeta_9):\mathbb{Q}(\zeta_3)]=\dfrac{[\mathbb{Q}(\zeta_9):\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\zeta_3):\mathbb{Q}]}=\dfrac{\varphi(3^2)}{\varphi(3)}=\dfrac{6}{2}=3$.

Es ist daher $(\zeta_9^0,\zeta_9^1,\zeta_9^2)$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

Es ist $\zeta_9^3=\zeta_3$ und somit $m(X):=X^3-\zeta_3$ ein normiertes Polynom in $\mathbb{Q}(\zeta_3)[X]$ minimalen Grades, das ζ_9 als Nullstelle hat.

Es folgt $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}(\zeta_3)}(X)=m(X)=X^3-\zeta_3$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Man zeige: Es ist nicht möglich, ausgehend von einer Strecke der Länge 1 mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $\sqrt[5]{6}$ zu konstruieren.

Lösung. Mit Eisenstein für $p = 2$ ist das Polynom $m(X) := X^5 - 6 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel, da $-6 \equiv_2 0$ ist und $-6 \not\equiv_{2^2} 0$ ist.

Da $m(X)$ normiert ist und $m(\sqrt[5]{6}) = 0$ ist, folgt $m(X) = \mu_{\sqrt[5]{6},\mathbb{Q}}(X)$.

Somit ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{6}) : \mathbb{Q}] = \deg(\mu_{\sqrt[5]{6},\mathbb{Q}}(X)) = 5$, was keine Potenz von 2 ist. Daher ist keine Strecke der Länge $\sqrt[5]{6}$ konstruierbar.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Man zeige oder widerlege.

(1) Es gibt keine einfache Gruppe von Ordnung 21.

(2) Sei G eine Gruppe. Die Abbildung $\varphi : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

(3) Es gibt abelsche Gruppen G_1, G_2, G_3 der Ordnung 4, die paarweise nichtisomorph sind.

(4) Sei R ein Integritätsbereich. Sei $I \lhd R$ ein Ideal. Dann ist R/I ein Integritätsbereich.

(5) Es ist das Polynom $X^7 + 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.

Lösung.

(1) Richtig. Sei G eine Gruppe mit $|G| = 21$. Es ist $|\operatorname{Syl}_7(G)| \equiv_7 1$ und ein Teiler von 3. Daher ist $|\operatorname{Syl}_7(G)| = 1$. Folglich ist die 7-Sylowgruppe ein Normalteiler von G, der Ordnung 7 hat und also weder 1 noch G ist. Somit ist G nicht einfach.

(2) Falsch. Sei $G = \mathrm{S}_3$. Dann ist

$$(1,3,2) = \varphi((1,2,3)) = \varphi((1,2) \circ (2,3)) \neq \varphi((1,2)) \circ \varphi((2,3)) = (1,2) \circ (2,3) = (1,2,3)\ .$$

(3) Falsch. Abelsche Gruppen der Ordnung 4 sind entweder isomorph zu C_4 oder zu $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$, da wir für 4 nur folgende Produktzerlegungen in Faktoren in $\mathbb{Z}_{\geqslant 2}$, die sich nacheinander teilen, finden: $4 = 4$ und $4 = 2 \cdot 2$. Somit kann es keine drei Gruppen G_1, G_2, G_3 der Ordnung 4 geben, die paarweise nichtisomorph sind.

(4) Falsch. Zum Beispiel ist $R := \mathbb{Z}$ ein Integritätsbereich und $I := (4)$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$. Aber $R/I = \mathbb{Z}/(4)$ ist kein Integritätsbereich, da darin $2 \cdot 2 = 0$ ist, aber $2 \neq 0$.

(5) Richtig. Mit Eisenstein für $p = 2$ ist $X^7 + 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel, da $4 \equiv_2 0$, $2 \equiv_2 0$ und $2 \not\equiv_{2^2} 0$ ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte) Sei G eine endliche nichtabelsche Gruppe der Ordnung 55.

(1) Man bestimme $|\operatorname{Syl}_5(G)|$ und $|\operatorname{Syl}_{11}(G)|$.

(2) Man bestimme die Anzahl der Elemente der Ordnung 5 in G.

Lösung.

(1) Es ist $|\operatorname{Syl}_{11}(G)| \equiv_{11} 1$ und ein Teiler von 5. Daher ist $|\operatorname{Syl}_{11}(G)| = 1$.

Es ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| \equiv_5 1$ und ein Teiler von 11. Daher ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| \in \{1, 11\}$.

Annahme, es ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| = 1$. Dann haben wir eine 5-Sylowgruppe $P \trianglelefteqslant G$ mit $|P| = 5$ und eine 11-Sylowgruppe $Q \trianglelefteqslant G$ mit $|Q| = 11$. Da 5 und 11 prim sind, ist $P \simeq \mathrm{C}_5$ und $Q \simeq \mathrm{C}_{11}$. Da 5 und 11 teilerfremd sind, ist $P \cap Q = 1$. Es ist $|P| \cdot |Q| = 55$. Folglich ist $G \simeq \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_{11}$ und daher abelsch. Wir haben einen *Widerspruch.*

Somit ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| = 11$.

(2) Jede 5-Sylowgruppe von G enthält 4 Elemente der Ordnung 5, da 5 prim ist. Da die 5-Sylowgruppen paarweise Schnitt 1 haben und da $|\operatorname{Syl}_5(G)| = 11$ ist, gibt es $4 \cdot 11 = 44$ Elemente der Ordnung 5 in G.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(1) Sei $f := (1, 2, 4, 3) \in \mathrm{S}_5$ und $g := (1, 4, 3)(2, 5) \in \mathrm{S}_5$. Man bestimme $f \circ g$.

(2) Man bestimme ein Element $h \in \mathrm{S}_4$ mit ${}^{h}(1, 2, 3, 4) = (1, 3, 4, 2)$.

(3) Ist die alternierende Gruppe A_4 abelsch?

Lösung.

(1) Es ist

$$f \circ g \;=\; (1, 2, 4, 3) \circ (1, 4, 3)(2, 5) \;=\; (1, 3, 2, 5, 4)\ .$$

(2) Z.B. ist für $h := (2, 3, 4)$

$${}^{(2,3,4)}(1, 2, 3, 4) = (1, 3, 4, 2)\ .$$

(3) Nein, A_4 ist nichtabelsch. Es sind z.B. $(1, 2, 3), (1, 2, 4) \in \mathrm{A}_4$ und

$$(1, 2, 3) \circ (1, 2, 4) \;=\; (1, 3)(2, 4) \;\neq\; (1, 4)(2, 3) \;=\; (1, 2, 4) \circ (1, 2, 3)\ .$$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Man bestimme $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{v}_3(x) = 2$ und $\mathrm{v}_3(y) = 2$ so, dass x und y in $\mathbb{Z}$ nicht assoziiert sind.

Lösung. Zum Beispiel ist für $x := 9 = 3^2$ und $y := 18 = 2^1 \cdot 3^2$ sowohl $\mathrm{v}_3(x) = 2$ als auch $\mathrm{v}_3(y) = 2$.

Dabei ist $y = 2 \cdot x$ und $2 \notin \mathrm{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$. Daher sind x und y nicht assoziiert.

Aufgabe 9 (3 Punkte) Sei $G := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,:\, c \in \mathbb{F}_3\,,\ a, d \in \mathbb{F}_3^\times \right\} \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

Es operiert G auf $\mathbb{F}_3^{2\times 1}$ via $A \cdot v := Av$, also via Multiplikation der Matrix $A \in G \subseteq \mathbb{F}_3^{2\times 2}$ mit dem Vektor $v \in \mathbb{F}_3^{2\times 1}$.

(1) Man bestimme die Ordnung $|G|$ der Gruppe G.

(2) Für $x := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_3^{2\times 1}$ bestimme man den Stabilisator $\mathrm{Stab}_G(x) \leqslant G$.

(3) Wieviele Elemente enthält die Bahn $G \cdot x$?

Lösung.

(1) Es ist $|G| = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

(2) Für $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c+d \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn $a \stackrel{!}{=} 1$ und $c \stackrel{!}{=} 1 - d$ ist. Somit ist $\mathrm{Stab}_G(x) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1-d & d \end{smallmatrix}\right) \,:\, d \in \mathbb{F}_3^\times \right\}$.

(3) Nach dem Bahnenlemma ist $G/\mathrm{Stab}_G(x) \simeq G \cdot x$ als G-Mengen.

Daher folgt $|G \cdot x| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(x)|} = \dfrac{12}{2} = 6$.
