Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	Summe
Punkte	/3	/4	/4	/6	/5	/2	/6	/ 30

Algebra Lehramt

Hausarbeit

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitung:** Als Hausarbeit.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Alles.
- Eintragungen mit Rotstift sind unerwünscht.
- Die Ergebnisse sind in die vorgesehenen Kästen einzutragen. Falls in der Aufgabe Herleitungen oder Begründungen verlangt sind, sind diese in die vorgesehenen Kästen einzutragen.
- Ein Scan des eigenhandschriftlich ausgefüllten Vordrucks ist im Ilias hochzuladen. Bevorzugtes Format: Einzelne pdf-Datei mit Nachnamen im Dateinamen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (3 Punkte) Man bestimme ein $a \in \mathbb{Z}$, für welches ein Ringisomorphismus wie folgt existiert.

$$\begin{array}{rcl} \varphi \;:\; \mathbb{Z}/(a) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(5) \\ z + (a) & \mapsto & (z + (9)\;,\; z + (5)) \end{array}$$

Sei dazu $a = \boxed{}$

Man bestimme die Abbildungsvorschrift für φ^{-1} :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/(a) & \xleftarrow{\varphi^{-1}} & \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(5) \\ \boxed{} & \leftarrow\!\shortmid & (x + (9)\;,\; y + (5)) \end{array}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $f \in \mathrm{S}_6$ gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} f : [1,6] & \to & [1,6] \\ 1 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 2 \\ 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 6 \\ 5 & \mapsto & 3 \\ 6 & \mapsto & 4\,. \end{array}$$

(1) Man schreibe f in Zykeldarstellung: $f =$ $\boxed{}$

(2) Welche Ordnung hat f? $\boxed{}$

(3) Man bestimme alle $k \in [1,6]$, für die f konjugiert zu f^k ist in S_6: $\boxed{}$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[X]/(X^3 - X + 1)$.
Sei $\varepsilon := X + (X^3 - X + 1) \in \mathbb{F}_{27}$. Es ist also $\varepsilon^3 = \varepsilon - 1$.

(1) Entscheiden Sie, ob $\mathrm{U}(\mathbb{F}_{27}) = \langle \varepsilon \rangle$ ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(2) Man bestimme das Minimalpolynom $\mu_{\varepsilon^2,\mathbb{F}_3}(X) =$ $\boxed{}$

(3) Man bestimme das Minimalpolynom $\mu_{\varepsilon^3,\mathbb{F}_3}(X) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Man zeige oder widerlege.

(1) Sei G eine Gruppe. Sei $U \leqslant G$. Sei $V := \bigcap\limits_{g \in G} {}^{g}U$. Es ist $V \trianglelefteqslant G$.

(2) Der Körper $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ ist algebraisch abgeschlossen.

(3) Es gibt abelsche Gruppen G_1, G_2, G_3 der Ordnung 24, die paarweise nichtisomorph sind.

(4) Sei K ein Körper. Sei $f(X) \in K[X]$ ein normiertes Polynom, welches in K keine Nullstelle hat. Dann ist $f(X)$ irreduzibel in $K[X]$.

(5) Sei G eine Gruppe von Ordnung 24. Dann ist $|\operatorname{Syl}_3(G)| \in \{1, 4\}$.

(6) Sei G eine endliche Gruppe. Seien $g,\ h \in G$ mit $G = \langle g, h\rangle$, mit $|\langle g\rangle| = 2$ und mit $|\langle h\rangle| = 5$. Es gibt keine transitive G-Menge X mit $|X| = 4$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sei bekannt: Es ist $\cos(7x) = 64\cos(x)^7 - 112\cos(x)^5 + 56\cos(x)^3 - 7\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(1) Sei $c := 2\cos(\frac{\pi}{14})$. Man finde ein irreduzibles Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(c) = 0$.

$f(X) =$

Begründung der Irreduzibilität:

(2) Man folgere: Es ist nicht möglich, ausgehend von einer Strecke der Länge 1 mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $\cos(\frac{\pi}{14})$ zu konstruieren.

(3) Man entscheide, ob es möglich ist, ein regelmäßiges 7-Eck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 6 (2 Punkte) Seien G und H Gruppen mit $|G| = 18$ und $|H| = 15$. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenmorphismus mit $|\varphi(G)| > 1$. Man bestimme $|\operatorname{Kern}(\varphi)|$.

Aufgabe 7 (6 Punkte) Sei G eine Gruppe der Ordnung 33.

(1) Man zeige: G ist isomorph zu $\mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_{11}$.

(2) Man bestimme die Anzahl der Elemente der Ordnung 3 in G:

(3) Man bestimme die Anzahl der Elemente der Ordnung 11 in G:

(4) Man bestimme die Anzahl der Elemente der Ordnung 33 in G:
