M. Künzer Abgabe bis Di 28.07.20

Algebra für Lehramt, SoSe 20

Scheinklausur

als Hausarbeit

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

(1) Man bestimme das Minimalpolynom $\mu_{2-\zeta_3,\mathbb{Q}}(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

(2) Man bestimme $(2-\zeta_3)^{-1}$ in $\mathbb{Q}(\zeta_3)$.

(3) Man finde eine Primfaktorzerlegung von 7 in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$.

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte) Sei $G = \mathrm{S}_5$.

(1) Gibt es in G eine zyklische Untergruppe der Ordnung 5 ?

(2) Gibt es in G eine Untergruppe der Ordnung 8 ?

(3) Gibt es in G eine abelsche Untergruppe der Ordnung 8 ?

Aufgabe 3 (1+1+3 Punkte) Sei $G := \langle (1,2,3),\, (4,5) \rangle \leqslant \mathrm{S}_5$.

(1) Man bestimme $|G|$.

(2) Ist $\{1,2,3,4,5\}$ eine transitive G-Menge?

(3) Man bestimme die Bahn $G \cdot 1$.
Man bestimme die Untergruppe $\mathrm{Stab}_G(1)$.
Man bestätige die Aussage des Bahnenlemmas in diesem Fall.

Aufgabe 4 (2+3+1 Punkte) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 30$. Sei G nicht zyklisch.

(1) Ist G abelsch?

(2) Ist G einfach?

(3) Man gebe ein Beispiel einer nichtabelschen Gruppe von Ordnung 30 an.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte)

(1) Man finde alle irreduziblen normierten Polynome von Grad 2 in $\mathbb{F}_2[X]$.

(2) Ist $X^4 + X^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel? Man entscheide dies unter Verwendung von (1).

(3) Ist $X^4 + 5X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel? Man entscheide dies unter Verwendung von (2).

Aufgabe 6 (2+2+1+1+1 Punkte)

(1) Man konstruiere einen Körper K mit $|K| = 25$.

(2) Man finde ein Element $y \in K$ mit $y^5 \neq y$.

(3) In wieviele irreduzible normierte Faktoren zerfällt $X^{24} - 1 \in K[X]$?

(4) Wir erinnern an $\Phi_{12}(X) = X^4 - X^2 + 1$.
In wieviele irreduzible normierte Faktoren zerfällt $X^4 - X^2 + 1 \in K[X]$?

(5) Gibt es in $K[X]$ ein irreduzibles normiertes Polynom von Grad $\geqslant 2$?