Algebra für Lehramt, SoSe 20

Blatt 6

Aufgabe 21
Sei p prim. Man bestimme die Menge $\mathrm{Syl}_p(\mathrm{S}_5)$.
Man bestätige dafür die Aussagen von Satz 141.(3).

(1) $p = 5$.

(2) $p = 3$.

(3) $p = 2$.

Aufgabe 22

(1) Sei G eine Gruppe. Sei X eine G-Menge. Sei $x \in X$. Sei $g \in G$.
Man zeige $\mathrm{Stab}_G(g \cdot x) = {}^g\mathrm{Stab}_G(x)$.

(2) Sei G eine Gruppe. Sei $x \in G$. Sei $U \leqslant G$. Sei $g \in G$.
Man zeige $\mathrm{C}_G({}^g x) = {}^g\mathrm{C}_G(x)$ und $\mathrm{N}_G({}^g U) = {}^g\mathrm{N}_G(U)$

(3) Sei G eine Gruppe. Sei $U \leqslant G$. Man zeige $U \trianglelefteqslant \mathrm{N}_G(U)$.

(4) Man folgere das Lemma 138 von Cauchy aus dem Satz 141 von Sylow.

Aufgabe 23
Sei p prim. Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. Sei $X := \mathrm{P}^1(\mathbb{F}_p)$ die Menge der Ursprungsgeraden in $\mathbb{F}_p^{2\times 1}$.

(1) Man konstruiere eine nichttriviale Operation von G auf X.
Der zugehörige Gruppenmorphismus heiße $\varphi : G \to \mathrm{S}_X$.

(2) Man zeige die Gleichheiten $\mathrm{Z}(G) = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \,:\, a \in \mathbb{F}_p\,,\ a^2 = 1 \} = \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(3) Für welche Primzahlen p ist der induzierte Gruppenmorphismus

$$\bar{\varphi} \;:\; \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p) := G/\mathrm{Z}(G) \;\to\; \mathrm{S}_X$$

ein Isomorphismus?

Aufgabe 24 Sei $n \geqslant 1$. Sei G eine endliche Gruppe von Ordnung n. Sei p prim.
Sei $P \leqslant G$ eine p-Sylowgruppe. Sei $P \ntrianglelefteq G$ bekannt.
Man bestimme $|\,\mathrm{Syl}_p(G)|$.

(1) $n = 6$, $p = 2$.

(2) $n = 21$, $p = 3$.

(3) $n = 80$, $p = 5$.

(4) $n = 42$, $p = 3$.