Algebra für Lehramt, SoSe 20

# Blatt 2

**Aufgabe 5** Sei $R$ ein kommutativer Ring mit $\mathrm{char}(R) =: p$ prim.
Wir betrachten die Frobenius-Abbildung $F : R \to R : x \mapsto x^p$.
Man zeige oder widerlege.

(1) Es ist $F$ ein Ringmorphismus.

(2) Es ist $F$ injektiv.

(3) Falls $R$ ein Körper ist, dann ist $F$ injektiv.

(4) Falls $R$ ein Körper ist, dann ist $F$ bijektiv.

**Aufgabe 6** Wir betrachten den kommutativen Ring $\mathbb{Z}$. Seien $a,\ b \in \mathbb{Z}^\times$.
Zu zeigen ist folgendes.

(1) Es ist $(a, b) = (\mathrm{ggT}(a, b))$.

(2) Es ist $(a) \cap (b) = (\mathrm{kgV}(a, b))$.

**Aufgabe 7** Sei $\zeta_3 := \exp(2\pi \mathrm{i}/3) = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

(1) Man bestätige $\zeta_3^2 + \zeta_3 + 1 = 0$.

(2) Wir betrachten den Teilring $\mathbb{Z}[\zeta_3] := \{\, a + b\zeta_3 \,:\, a,\ b \in \mathbb{Z} \,\} \subseteq \mathbb{C}$.
Sei $d : \mathbb{Z}[\zeta_3]^\times \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0} : z = a + b\zeta_3 \mapsto |z|^2 = a^2 - ab + b^2$.
Man zeige, daß $d$ eine Gradfunktion auf $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ ist, mithin $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ ein euklidischer Ring.

(3) Ist 3 prim in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$?

**Aufgabe 8** Wir betrachten den faktoriellen Ring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.
Man finde eine Primfaktorzerlegung von $x$ in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

(1) $x = 5$.

(2) $x = 4$.

(3) $x = 3$.

(4) $x = 5\mathrm{i}$.