Algebra für Lehramt, SoSe 20

Blatt 12

Aufgabe 45 Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.
Sei $n \geqslant 1$. Sei $M_n := \{ y \in K : y^n = 1 \}$.

(1) Ist M_n eine endliche Untergruppe von $\mathrm{U}(K)$?

(2) Sei $\mathrm{char}(K) = 0$.
Gibt es ein $\zeta \in K$ derart, daß in $K[X]$ sich $X^n - 1 \;=\; \prod_{k\in[0,n-1]}(X - \zeta^k)$ ergibt?

(3) Sei $\mathrm{char}(K) = 3$. Man bestimme $|M_6|$.

(4) Sei $\mathrm{char}(K)$ beliebig.
Gibt es ein $\zeta \in K$ derart, daß in $K[X]$ sich $X^n - 1 \;=\; \prod_{k\in[0,n-1]}(X - \zeta^k)$ ergibt?

Aufgabe 46

(1) Sei $A|\mathbb{Q}$ ein algebraischer Abschluß.
Ist $A|\mathbb{Q}$ eine endliche Erweiterung?

(2) Sei p eine Primzahl. Sei $A|\mathbb{F}_p$ ein algebraischer Abschluß.
Ist $A|\mathbb{F}_p$ eine endliche Erweiterung?

Aufgabe 47 Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(1) Sei $\tilde{K}$ ein Körper mit $\tilde{K} \simeq K$. Ist auch $\tilde{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper?

(2) Gibt es eine Körpererweiterung $L|K$ mit $K \neq L$?

(3) Gibt es eine Körpererweiterung $L|K$ mit $K \neq L$, für welche jedes Element von L algebraisch über K ist?

Aufgabe 48
Sei $\mathbb{F}_9 := \mathbb{F}_3[X]/(X^2+1)$ und $\iota := X + (X^2+1)$. In $\mathbb{F}_9$ ist $3 = 0$ und $\iota^2 = -1$.
Sei $\widetilde{\mathbb{F}_9} := \mathbb{F}_3[X]/(X^2 - X - 1)$ und $\kappa := X + (X^2 - X - 1)$. In $\widetilde{\mathbb{F}_9}$ ist $3 = 0$ und $\kappa^2 = \kappa + 1$.

(1) Man konstruiere zwei verschiedene Körperisomorphismen φ und ψ von $\widetilde{\mathbb{F}_9}$ nach $\mathbb{F}_9$.

(2) Sind dies alle Körperisomorphismen von $\widetilde{\mathbb{F}_9}$ nach $\mathbb{F}_9$?

(3) Ist $\varphi \circ \psi^{-1} = \mathrm{Fr}_{\mathbb{F}_9} : \mathbb{F}_9 \to \mathbb{F}_9$?