Bsp zu quadratfrei über Erweiterung.

Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$.

Sei $f(X) \in K[X]$ irreduzibel

und normiert.

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung

derart, daß $f(X) \in L[X]$

in ein Produkt von Faktoren

von Grad 1 zerfällt:

$$f(X) = (X-b_1)\cdot\ldots\cdot(X-b_k),$$

wobei $k := \deg(f(X))$

und $b_1, \ldots, b_k \in L$.

Dann sind die Elemente

$b_1, \ldots, b_k$ paarweise verschieden.

Mit anderen Worten, es ist

$f(X)$ in $L[X]$ quadratfrei.

Mit anderen Worten, es ist

$$\mathrm{ggT}(f(X), f'(X)) = 1.$$

In der Tat: Dieser ggT darf

in $K[X]$ gebildet werden gemäß

Bem. 216. Es ist $g(X) :=$

$\mathrm{ggT}(f(X), f'(X))$ ein Teiler

von $f(X)$ und von $f'(X)$.

Da $f(X)$ in $K[X]$ irreduzibel ist, ist $g(X) \in \{1, f(X)\}$.

Da $\mathrm{char}(K) \neq 0$, ist $f'(X) \neq 0$.

Da $g(X)$ auch $f'(X)$ teilt, folgt $g(X) = 1$, wie gewünscht.

<u>Bsp</u>: Voriges Bsp funktioniert nicht, falls $\mathrm{char}(K) = p > 0$.

Sei $K = \mathbb{F}_2(T^2)$.

Sei $L = \mathbb{F}_2(T)$.

Es ist $L|K$.

Es ist $\mu_{T,K}(X) = X^2 - T^2 \in K[X]$.

Insbesondere ist $\mu_{T,K}(X) \in K[X]$

irreduzibel.

Aber in $L[X]$ ist

$$X^2 - T^2 = (X-T)^2 .$$

Somit kommen in dieser Zerlegung

zwei gleiche Faktoren vor.

Es ist X^2-T^2 also nicht

quadratfrei in $L[X]$.

Es ist aber X^2-T^2 quadratfrei

in $K[X]$.

Es ist $\operatorname{ggT}(X^2-T^2, \underbrace{(X^2-T^2)'}_{=0})$

$$= X^2 - T^2 \neq 1$$

Bsp zu Kreisteilungspolynomen.

Wir wollen $\Phi_{12}(X)$ berechnen.

Es ist

$$X^{12}-1 = \underbrace{\Phi_1(X)}^{X-1}\,\underbrace{\Phi_2(X)}^{X+1}\,\underbrace{\Phi_3(X)}^{X^2+X+1}$$

$$\cdot\,\underbrace{\Phi_4(X)}_{X^2+1}\cdot\underbrace{\Phi_6(X)}_{X^2-X+1}\cdot\Phi_{12}(X)$$

$$\Rightarrow \Phi_{12}(X) = \frac{X^{12}-1}{\underbrace{(X-1)(X+1)(X^2+1)}_{X^4-1}\underbrace{(X^2+X+1)(X^2-X+1)}_{X^4+X^2+1}}$$

$$= \frac{X^8+X^4+1}{X^4+X^2+1} = X^4-X^2+1$$

30.6.20-6

Bsp zu Kreisteilungspolynomen.

Wir wollen $\Phi_{30}(X)$ berechnen.

Es ist

$$X^{30}-1 = \Phi_1(X)\,\Phi_2(X)\,\Phi_3(X)\,\Phi_5(X) \cdot \Phi_6(X)\cdot\Phi_{10}(X)\cdot\Phi_{15}(X) \cdot \Phi_{30}(X).$$

Wir wollen das geschickt zusammenfassen.

Es ist

$$X^{15}-1 = \Phi_1(X)\,\Phi_3(X)\,\Phi_5(X)\,\Phi_{15}(X)$$

$$X^{10}-1 = \Phi_1(X)\,\Phi_2(X)\,\Phi_5(X)\,\Phi_{10}(X)$$

$$X^{5}-1 = \Phi_1(X)\,\Phi_5(X).$$

Also ist

$$\Phi_{30}(x) = \frac{(x^{30}-1)(x^5-1)}{(x^{15}-1)(x^{10}-1)\;\Phi_6(x)}$$

$$= \frac{(x^{15}+1)(x^5-1)}{(x^{10}-1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{x^{20}-x^{15}+x^5-1}{x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^2+x-1}$$

Jetzt Polynomdivision:

$$(x^{20}-x^{15}+x^5-1) = (x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^2+x-1)\cdot(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$$

$$\begin{array}{l}
x^{20}-x^{19}+x^{18}-x^{10}+x^9-x^8 \\
\hline
x^{19}-x^{18}-x^{15}+x^{10}-x^9+x^8+x^5-1 \\
x^{19}-x^{18}+x^{17}-x^9+x^8-x^7 \\
\hline
-x^{17}-x^{15}+x^{10}+x^7+x^5-1 \qquad \ldots
\end{array}$$

... Übertrag

$$-x^{17}-x^{15}+x^{10}+x^{7}+x^{5}-1$$
$$-x^{17}+x^{16}-x^{15}+x^{7}-x^{6}+x^{5}$$

$$-x^{16}+x^{10}+x^{6}-1$$
$$-x^{16}+x^{15}-x^{14}+x^{6}-x^{5}+x^{4}$$

$$-x^{15}+x^{14}+x^{10}+x^{5}-x^{4}-1$$
$$-x^{15}+x^{14}-x^{13}+x^{5}-x^{4}+x^{3}$$

$$x^{13}+x^{10}-x^{3}-1$$
$$x^{13}-x^{12}+x^{11}-x^{3}+x^{2}-x$$

$$x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^{2}+x-1$$
$$x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^{2}+x-1$$

$$0$$

Also

$$\Phi_{30}(X) = X^8 + X^7 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1.$$

<u>Bem.</u> Die Koeffizienten der Kreisteilungspolynome sind eine Wissenschaft für sich.

Z.B. hat $\Phi_{105}(X)$ den Koeffizienten -2 bei X^7. Dies zeigt, daß i.a. die Koeffizienten von $\Phi_n(X)$ nicht in $\{-1, 0, +1\}$ liegen.

Bsp zur Eulerschen φ-Funktion

Es ist

$$\varphi(105) = \varphi(3)\cdot\varphi(5)\cdot\varphi(7)$$

$$= (3-1)(5-1)(7-1)$$

$$= 48.$$

Es ist

$$\varphi(72) = \varphi(8)\cdot\varphi(9)$$

$$= 2^2(2-1)\cdot 3^1(3-1)$$

$$= 24$$