R : Integritätsbereich

__Def__ : R heißt __Hauptidealbereich__, falls jedes Ideal in R von der Form $(x) = xR$ ist für ein $x \in R$.

__Def__ $d : R^\times \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ heißt __Gradfunktion__, falls d "Division mit Rest erlaubt", d.h. falls es für $x \in R$, $y \in R^\times$ Elemente $q, r \in R$ gibt mit

$$x = yq + r$$

und mit $r = 0$ oder $d(r) < d(y)$.

Ein Integritätsbereich R, zusammen mit einer Gradfkt heißt <u>euklidischer Ring</u>.

<u>Bem</u>: Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealbereich.

<u>Bsp</u> $d : \mathbb{Z}^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} : z \longmapsto |z|$
ist Gradfunktion
$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ mit d euklidisch
$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ Hauptidealbereich

<u>Bsp</u> $(9, 15) = \{ a_1 \cdot 9 + a_2 \cdot 15 : a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \}$

Es wird

$$(9,15) = (9, 15-9) = (9,6) = (9-6, 6) = (3,6) = (3)$$

Bsp $d: \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$;

$$f(X) \longmapsto \deg(f(X))$$

ist Gradfkt

$\Rightarrow \mathbb{Q}[X]$ mit d euklidisch

$\Rightarrow \mathbb{Q}[X]$ Hauptidealbereich

Bsp $(X^3+X, X^2) = \{ a_1(X)\cdot(X^3+X) + a_2(X)\cdot X^2 : a_1(X), a_2(X) \in \mathbb{Q}[X]\}$

Es wird

$$(X^3+X, X^2) = ((X^3+X) - X\cdot X^2, X^2)$$

$$= (X, X^2) = (X)$$

Bsp (1) In $\mathbb{Z}$ ist

$$(-4) = (4),$$

also sind -4 und 4 assoziiert

(2) Es ist

$$(6) \subseteq (2),$$

also ist 2 ein Teiler von 6.

(3) Es ist $(2 \cdot 3) = (6)$, aber $(2) \neq (6)$ und $(3) \neq (6)$.

Also ist 6 nicht irreduzibel, und also auch nicht prim.

Bsp In $\mathbb{F}_3[X]$

hat X^2+X-1 keine

Teiler vom Grad 1, da es

keine Nullstelle in $\mathbb{F}_3$ hat:

weder 0 noch 1 noch -1

eine Nullstelle.

Also: $(X^2+X-1) = (u(X)\cdot v(X))$

$\Rightarrow$ $u(X)$ oder $v(X)$ konstant

$\Rightarrow$ $(X^2+X-1) = (v(X))$

oder $(X^2+X-1) = (u(X))$

z.B. könnte noch $u(X) = -1$

und $v(X) = -X^2-X+1$ sein,

aber das ist auch eine "triviale Zerlegung"

28.4.20
-6

Def: Der Integritätsbereich R heißt faktoriell, falls gelten:

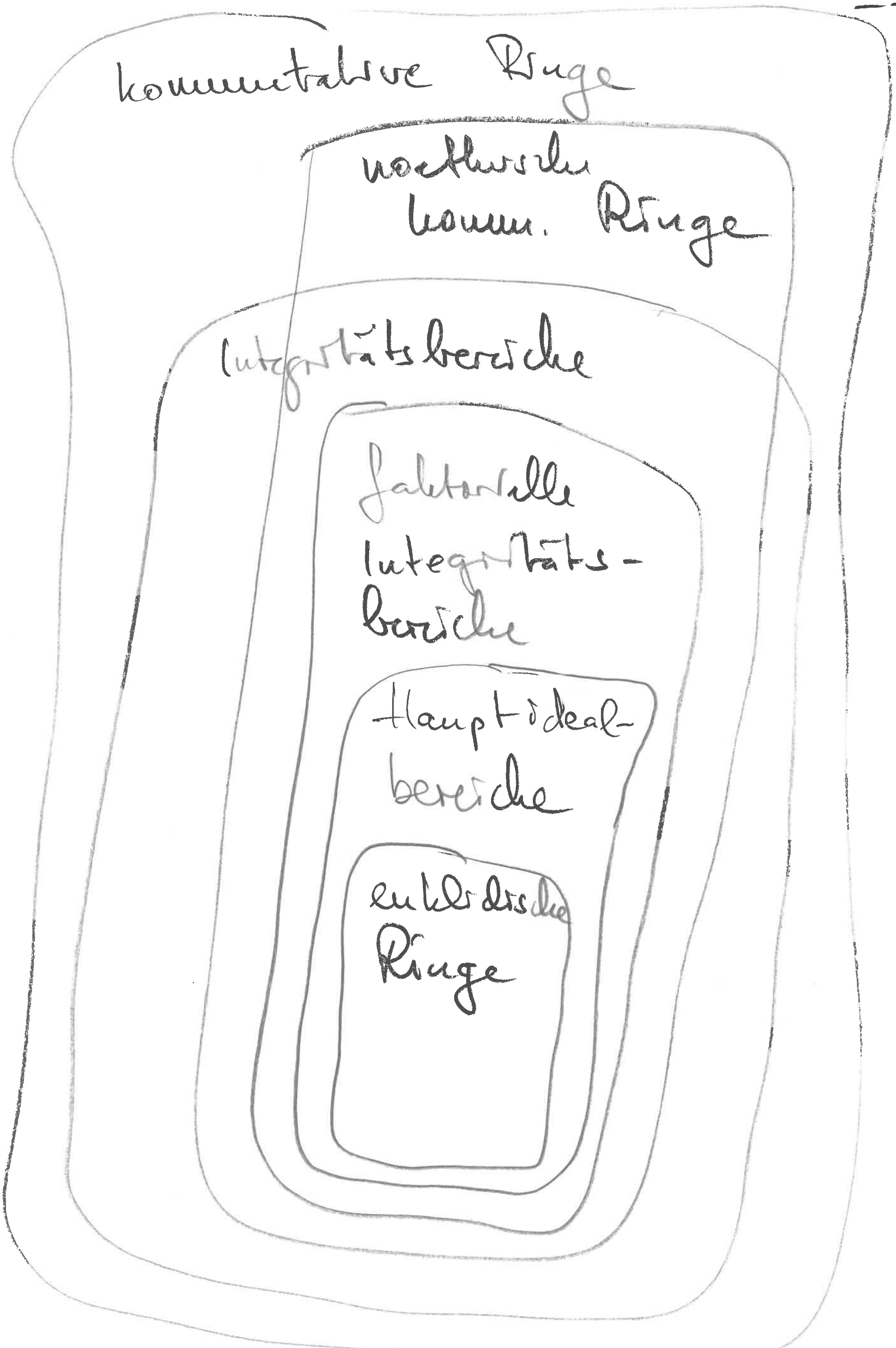
(1) R noethersch

(2) In R ist

irreduzibel $\iff$ prim

Lemma Hauptidealbereiche sind faktoriell

Bew: R faktoriell
$\Rightarrow$ jedes Element hat eine Primfaktorzerlegung.
Diese ist dann eindeutig b.a. Reihenfolge und Assoziiertheit.


kommutative Ringe
noethersche komm. Ringe
Integritätsbereiche
faktorielle Integritätsbereiche
Hauptidealbereiche
euklidische Ringe