R : Integritätsbereich

Dh. : $x, y \in R^{\times} = R \setminus \{0\}$

$\Longrightarrow \quad x \cdot y \in R^{\times}$

Wir bilden den Quotientenkörper:

$$\mathrm{Quot}(R) := \left\{ \frac{a}{b} : a \in R,\ b \in R^{\times} \right\}$$

Die Regeln sind "dieselben wie in $\mathbb{Q}$":

$$\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx} \quad \text{für } x \in R^{\times}$$

(nach Konstruktion von $\frac{a}{b}$ als Äquivalenz-klasse)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Wir haben den injektiven Ringmorphismus

$$\begin{aligned} R &\xrightarrow{\iota} \mathrm{Quot}(R) \\ a &\longmapsto \iota(a) = \frac{a}{1} \end{aligned}$$

Oft schreibt man kurz $a = \iota(a) = \frac{a}{1}$.

Ist K ein Körper, so schreibt man auch

$$K(X) := \mathrm{Quot}(K[X])$$

<u>Bsp</u> In $\mathbb{F}_3(X)$ ist:

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{2X+1} = \frac{2X+1+X}{X(2X+1)}$$

$$= \frac{1}{X(1-X)}$$

Bsp: In $\mathbb{F}_3(X)$ ist

$$\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^3 = \frac{X^3+3X^2+3X+1}{X^3-3X^2+3X-1}$$

$$= \frac{X^3+1}{X^3-1}$$

R: komm. Ring

$x_1, \dots, x_k \in R$

Ideal erzeugt von $x_1, \dots, x_k$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

$$:= \{ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k \ ; \ a_1, \dots, a_k \in R \}$$

Das ist die Menge der

R-Linearkombinationen

von $x_1, \dots, x_k$ in R

R heißt <u>noethersch</u>, falls

jedes Ideal von dieser Form

ist.

In der Praxis sind "in der Algebra so gut

wie alle" kommutativen

Ringe noethersch. Grund:

R noethersch $\xRightarrow[\text{Basissatz}]{\text{Hilbertscher}}$ $R[X]$ noethersch

(Nur zur Information:
Nicht noetherisch ist
z.B. der Polynomring in
abzählbar vielen Variablen.
Oder aber der Ring der stetigen
Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

Es ist $\mathbb{Z}$ ein Hauptideal-
bereich, d.h. jedes Ideal in
$\mathbb{Z}$ wird von einem Element
erzeugt.

<u>Bsp</u>: $(6, 8) = (2)$

$\subseteq$: Jedes Elt der Form
$a_1 \cdot 6 + a_2 \cdot 8$ ist

von der Form

$$b_1 \cdot 2,$$

d.h. durch 2 teilbar

$\supseteq$: Jedes Element der Form $b_1 \cdot 2$ ist auch schreibbar als $(-b_1) \cdot 6 + b_1 \cdot 8$.

<u>Bsp</u> $(5,7) = (1) = \mathbb{Z}$

$\subseteq$: klar

$\supseteq$: $1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$

$\in (5, 7)$

$\rightarrow (1) \subseteq (5, 7)$

$\mathbb{Q}[X]$ ist ein Hauptideal-bereich:

<u>Bsp</u> $(X^2, X^2+X) = (X)$

$\subseteq$: $X^2 \in (X)$, $X^2+X \in (X)$

$$\Rightarrow (X^2, X^2+X) \subseteq (X)$$

$\supseteq$: $X = -X^2 + (X^2+X)$

$$\in (X^2, X^2+X)$$

$$\Rightarrow (X) \subseteq (X^2, X^2+X)$$

$\mathbb{Z}[X]$ ist <u>kein</u> Hauptidealbereich.

<u>Annahme</u>, doch.

Dann ex. $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$

mit $(2, X) = (f(X))$.

Zunächst ist $f(X) \neq 0$.

Dann ist $2 \in (f(X))$,
also 2 ein Vielfaches von
$f(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$.
Somit ist $\deg(f(X)) = 0$,
also $f(X) = a_0$
für ein $a_0 \in \mathbb{Z}^\times$.

Ferner ist $X \in (f(X)) = (a_0)$
also X ein Vielfaches von a_0
in $\mathbb{Z}[X]$. Also ist
$a_0 \in \{-1, +1\}$. Es folgt
$$(2, X) = (1) = \mathbb{Z}[X].$$

Also
$$1 = u(X) \cdot 2 + v(X) \cdot X$$

für gewisse $u(X), v(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Koeffizientenvergleich bei X^0

gibt, daß $1 = u_0 \cdot 2$

sein sollte für ein $u_0 \in \mathbb{Z}$. ↯