Bsp zu Sylow

Sei $G = S_4$.

(1) Sei $p = 3$. Es ist $|S_4| = 3^1 \cdot \underbrace{8}_{\not\equiv_3 0}$.

Somit ist $Syl_3(S_4) = \{U : U \leq S_4, |U| = 3^1\}$.

Dazu brauchen wir Elemente der Ordnung 3:

$Syl_3(S_4) = \{\langle(1,2,3)\rangle, \langle(1,2,4)\rangle, \langle(1,3,4)\rangle, \langle(2,3,4)\rangle\}$

Es ist $|Syl_3(S_4)| = 4 \equiv_3 1$.

Es ist $|Syl_3(S_4)| = 4$ ein Teiler von 8.

Es sind alle 3-Sylowgruppen paarweise zueinander konjugiert, da die Erzeuger zueinander konjugiert sind.

26.05.20-2

(2) Sei $p = 2$.

Es ist $|S_4| = 2^3 \cdot 3$

Gesucht: $\mathrm{Syl}_2(S_4) = \{ U : U \leq S_4, |U| = 2^3 \}$

Haben: $D_8 := \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle$

$$= \{ \mathrm{id}, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1,3), (1,4)(2,3), (2,4), (1,2)(3,4) \}$$

Welche gibt es außerdem noch?

- Jede 2-Sylowuntergruppe ist zu D_8 konjugiert.
- Ferner ist $|\mathrm{Syl}_2(S_4)|$ ein Teiler von 3.

Das gibt uns eine Methode an die Hand: so lange Konjugierte von

D_8 bilden, bis entweder feststeht,

daß diese alle gleich D_8 sind,

wesfalls es nur eine 2-Sylowgruppe

gäbe und diese normal in S_4 läge,

oder bis wir 3 Konjugierte zu

D_8 gefunden haben, D_8 selbst

eingeschlossen.

Also:

$$\,^{(1,2,3)}D_8 = \langle (2,3,1,4), (2,1) \rangle$$

$$= \langle (1,4,2,3), (1,2) \rangle$$

$$= \{ \mathrm{id}, (1,4,2,3), (1,2)(3,4), (1,3,2,4),$$
$$(1,2), (1,3)(2,4), (3,4), (1,4)(2,3) \}$$

Ferner:

$$
{}^{(1,3,2)}D_8 = \langle (3,1,2,4), (3,2) \rangle
$$

$$
= \langle (1,2,4,3), (2,3) \rangle
$$

$$
= \{ \mathrm{id}, (1,2,4,3), (1,4)(2,3), (1,3,4,2), (2,3), (1,2)(3,4), (1,4), (1,3)(2,4) \}
$$

Somit haben wir 3 Konjugierte zu D_8 gefunden. Nach dem oben Gesagten ist also

$$
\mathrm{Syl}_2(S_4) = \{ D_8, {}^{(1,2,3)}D_8, {}^{(1,3,2)}D_8 \}
$$

Übrigens ist $D_8 \le N_{S_4}(D_8) \le S_4$, also $N_{S_4}(D_8) \in \{ D_8, S_4 \}$.

Bahnenlemma:

$$
|S_4| / |N_{S_4}(D_8)| = |\mathrm{Syl}_2(S_4)| = 3
$$

Somit ist $D_8 = N_{S_4}(D_8)$.

(Alternativ: Oben haben wir $D_8 \ntrianglelefteq S_4$ gesehen. Also ist $N_{S_4}(D_8) \neq S_4$.)

Desweiteren machen die Sylowsätze die Aussage, daß alle 2-Untergruppen von S_4 in einer 2-Sylowgruppe enthalten sind.

So z.B. sind

$U := \langle (1,2,3,4) \rangle$

und

$V := \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle$

zwei Untergruppen von Ordnung 2^2, ...

… die in D_8 enthalten sind.

Beachte: U und V sind nicht zueinander konjugiert.

Die Tatsache, daß alle p-Sylow-untergruppen zueinander konjugiert sind, läßt sich also <u>nicht</u> auf Untergruppen der Ordnung p^b verallgemeinern für ein $b \in [1, a-1]$ (Bezeichnungen wie in § 2.5)

<u>Bsp</u> für Sylow.

Es hat A_4 keine U'gp. der Ordnung 6. Die Tatsache, daß …

26.05.2017

... $\mathrm{Syl}_p(G) \neq \emptyset$ ist, läßt sich also <u>nicht</u> auf die Existenz einer Untergruppe mit einem Teiler von $|G|$ als vorgegebener Ordnung verallgemeinern.

<u>Bsp</u> für Sylow

Sei p prim.

Es ist $|GL_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2-1)(p^2-p)$

$$= \underbrace{p^1}_{p^a} \cdot \underbrace{(p^2-1)(p-1)}_{m}$$

Es ist $P := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{F}_p \right\}$$

$$\in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p))$$

Um die Anzahl der p-Sylow-untergruppen zu bestimmen, berechnen wir $N_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)}(P)$. Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$

Es ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in N_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)}(P)$

genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für ein $x \in \mathbb{F}_p^\times$ ist, also wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist, also wenn ...

$$\ldots \quad \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+xc & b+xd \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist. Es folgt $c = 0$. Es bleibt zu erfüllen:

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+xd \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Es folgt $a, d \in \mathbb{F}_p^\times$, damit überhaupt $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{F}_p)$ liegt. Es folgt $x = \frac{a}{d}$.

Somit:

$$N_{GL_2(\mathbb{F}_p)}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p \right\}$$

Insbesondere:

$$|N_{GL_2(\mathbb{F}_p)}(P)| = (p-1)^2 \cdot p$$

Das Bahnenlemma gibt:

$$|Syl_p(GL_2(\mathbb{F}_p))|$$

$$= |GL_2(\mathbb{F}_p)| \Big/ |N_{GL_2(\mathbb{F}_p)}(P)|$$

$$= \frac{\cancel{p}^1 \cdot (p^2-1)\,\cancel{(p-1)}}{(p-1)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{p}} = p+1$$

Und das bestätigt auch

$$|Syl_p(GL_2(\mathbb{F}_p))| = p+1 \equiv_p 1$$