25.05.20-1

<u>Bsp.</u> zu Bahnenlemma

Operiere S_4 auf $\{1,2,3,4\}$.

Diese Operation ist transitiv.

Es ist

$$\mathrm{Stab}_{S_4}(\{1\}) = \{ id, (2,3), (2,4), (3,4), (2,3,4), (2,4,3) \}$$

$$(\simeq S_3)$$

z.B. $3 = (1,3)\cdot 1$

Es ist $S_4 \cdot 1 = \{1,2,3,4\}$.

Das Bahnenlemma sagt: Wir haben einen Isomorphismus von S_4-Mengen

$$S_4 / \mathrm{Stab}_{S_4}(1) \xrightarrow{\sim} \{1,2,3,4\}$$

$$f \cdot \mathrm{Stab}_{S_4}(1) \longmapsto f\cdot 1 \underset{\text{Def. der Operation}}{=} f(1)$$

Dabei ist

$$\left| S_4 / \mathrm{Stab}_{S_4}(1) \right| = |S_4| / |\mathrm{Stab}_{S_4}(1)|$$

$$= 24/6 = 4 .$$

Das paßt also, da auch

$$|\{1,2,3,4\}| = 4 .$$

<u>Bsp</u> zu Bahnenlemma und Konjugationsklassen.

Wir haben in S_4 die Konjugationsklassen:

$${}^{S_4}\mathrm{id}, \quad {}^{S_4}(1,2), \quad {}^{S_4}(1,2,3),$$

$${}^{S_4}(1,2,3,4), \quad {}^{S_4}(1,2)(3,4)$$

(vgl. Scan 19.05.20-4)

Wir wollen unter Verwendung des Bahnenlemmas die Zentralisatoren der Repräsentanten bestimmen.

(1) $${}^{S_4}\mathrm{id} = \{\mathrm{id}\}$$

$${}^{S_4}\mathrm{id} \overset{\text{Bahnenlemma}}{\cong} S_4 / \mathrm{Stab}_{S_4}(\mathrm{id}) \overset{\text{Def. Zentralisator}}{=} S_4 / C_{S_4}(\mathrm{id})$$

$$\Rightarrow \quad 1 = |{}^{S_4}\mathrm{id}| = |S_4 / C_{S_4}(\mathrm{id})|$$

$$= |S_4| / |C_{S_4}(\mathrm{id})|$$

$$\Rightarrow \quad C_{S_4}(\mathrm{id}) = S_4$$

Aber das ist auch so klar:

$$C_{S_4}(\mathrm{id}) = \{ f \in S_4 : {}^{f}\mathrm{id} = \mathrm{id} \} = S_4$$

(2) $${}^{S_4}(1,2) = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

$${}^{S_4}(1,2) \overset{\text{Bahnen-}}{\underset{\text{Lemma}}{\cong}} S_4 / C_{S_4}((1,2))$$

$$\Rightarrow 6 = |{}^{S_4}(1,2)| = |S_4| / |C_{S_4}((1,2))|$$

$$\Rightarrow |C_{S_4}((1,2))| = \frac{24}{6} = 4$$

Direkt erkennen wir:

$$\langle (1,2),(3,4) \rangle \leq C_{S_4}((1,2))$$

Da $\langle (1,2),(3,4) \rangle$

$$= \{ id, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4) \}$$

Ordnung 4 hat, folgt

$$\langle (1,2),(3,4) \rangle = C_{S_4}((1,2)).$$

(3) $${}^{S_4}(1,2,3) = \{ (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3) \}$$

$${}^{S_4}(1,2,3) \underset{\sim}{\text{Bahnen-lemma}} S_4 / C_{S_4}((1,2,3))$$

$$\Rightarrow 8 = |{}^{S_4}(1,2,3)| = |S_4| / |C_{S_4}((1,2,3))|$$

$$\Rightarrow |C_{S_4}((1,2,3))| = \frac{24}{8} = 3$$

Direkt erkennen wir:

$$\langle (1,2,3) \rangle \leq C_{S_4}((1,2,3))$$

Da $\langle (1,2,3) \rangle = \{ id, (1,2,3), (1,3,2) \}$

Ordnung 3 hat, folgt

$$\langle (1,2,3) \rangle = C_{S_4}((1,2,3)).$$

(4) $\quad {}^{S_4}(1,2,3,4) = \{(1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3), (1,4,3,2)\}$

$${}^{S_4}(1,2,3,4) \overset{\text{Bahnen-lemma}}{\cong} S_4 / C_{S_4}((1,2,3,4))$$

$$\Rightarrow \quad 6 = \left| {}^{S_4}(1,2,3,4) \right| = |S_4| / |C_{S_4}((1,2,3,4))|$$

$$\Rightarrow \quad |C_{S_4}((1,2,3,4))| = \frac{24}{6} = 4$$

Direkt: $\quad \langle (1,2,3,4) \rangle \leq C_{S_4}((1,2,3,4))$

Da $\quad \langle (1,2,3,4) \rangle = \{ id, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2) \}$

Ordnung 4 hat, folgt

$$\langle (1,2,3,4) \rangle = C_{S_4}((1,2,3,4))$$

(nicht sonderlich überraschend ...)

(5) $\;{}^{S_4}(1,2)(3,4) = \{(1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}$

$${}^{S_4}(1,2)(3,4) \overset{\text{Bahnen-lemma}}{\cong} S_4 / C_{S_4}((1,2)(3,4))$$

$$\Rightarrow 3 = \left| {}^{S_4}(1,2)(3,4) \right| = |S_4| / |C_{S_4}((1,2)(3,4))|$$

$$\Rightarrow C_{S_4}((1,2)(3,4)) = \frac{24}{3} = 8$$

Direkt: $\langle (1,2), (3,4), (1,3)(2,4) \rangle \leq C_{S_4}((1,2)(3,4))$

z.B.: ${}^{(1,3)(2,4)}(1,2)(3,4) = (3,4)(1,2) = (1,2)(3,4)$

Nun gilt:

$$\langle (1,2), (3,4), (1,3)(2,4) \rangle$$

$= \{ id, (1,4,2,3), (1,2)(3,4), (1,3,2,4),$

$(1,3)(2,4) \circ (1,2) = (1,4,2,3)$

$(1,2), (1,3)(2,4), (3,4), (1,4)(2,3) \}$

Diese Gruppe ist von Ordnung 8.

Es folgt:

$$\langle (1,2), (3,4), (1,3)(2,4) \rangle = C_{S_4}((1,2)(3,4))$$

<u>Bsp</u> für Fixpunktlemma

Sei $G = S_4$,

was auf $X = [1,4] = \{1,2,3,4\}$

operiert.

Da X eine transitive S_4-Menge ist, hat X nur $k = 1$

Bahn, nämlich $S_4 \cdot 1 = \{1,2,3,4\}$.

Wir teilen ein:

$$S_4 = {}^{S_4}\mathrm{id} \sqcup {}^{S_4}(1,2)$$

$$\sqcup {}^{S_4}(1,2,3) \sqcup {}^{S_4}(1,2,3,4)$$

$$\sqcup {}^{S_4}(1,2)(3,4)$$

Vgl. Scan 19.05.20-4.

(1) Es ist $\mathrm{Fix}_{\mathrm{id}}(X) = \{1,2,3,4\}$

(2) Es ist $\mathrm{Fix}_{(1,2)}(X) = \{3,4\}$,

und analog für jedes Element von ${}^{S_4}(1,2)$.

(3) Es ist $\mathrm{Fix}_{(1,2,3)}(X) = \{4\}$,

und analog für jedes Element von ${}^{S_4}(1,2,3)$

(4) Es ist $\mathrm{Fix}_{(1,2,3,4)}(X) = \emptyset$,

und analog für jedes Element

von ${}^{S_4}(1,2,3,4)$

(5) Es ist $\mathrm{Fix}_{(1,2)(3,4)}(X) = \emptyset$,

und analog für jedes Element

von ${}^{S_4}(1,2)(3,4)$

Das Fixpunktlemma gibt

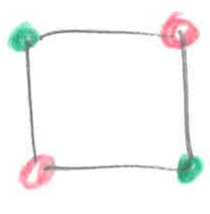
$$
\begin{aligned}
1 &= k \\
&= \frac{1}{|S_4|} \sum_{f \in S_4} |\mathrm{Fix}_f(X)| \\
&= \frac{1}{|S_4|} \sum_{f \in {}^{S_4}\mathrm{id} \sqcup {}^{S_4}(1,2) \sqcup {}^{S_4}(1,2,3) \sqcup {}^{S_4}(1,2,3,4) \sqcup {}^{S_4}(1,2)(3,4)} |\mathrm{Fix}_f(X)| \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

$$\ldots = \frac{1}{24}\Big(1\cdot 4 + 6\cdot 2 + 8\cdot 1 + 6\cdot 0 + 3\cdot 0\Big),$$

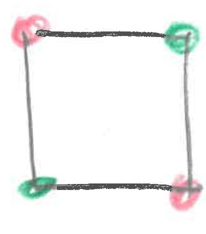
was zutrifft.

<u>Bsp</u> zu Fixpunktlemma

Wir färben die Ecken eines Quadrats mit rot und grün. Färbungen werden als gleich angesehen, wenn sie durch Spiegeln oder Drehen auseinander hervorgehen.



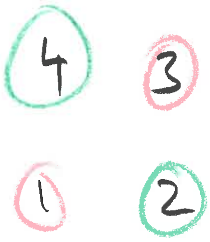
$=$



Wieviele Färbungen gibt es?

Eine Färbung ist nach Numerieren der Ecken eine Abbildung von $\{1,2,3,4\}$ nach $\{$rot, grün$\}$:

z.B.:



ist

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto \text{rot} \\ 2 &\longmapsto \text{grün} \\ 3 &\longmapsto \text{rot} \\ 4 &\longmapsto \text{grün} \end{aligned}$$

Auf der Menge der Abbildungen X von $\{1,2,3,4\}$ nach $\{$rot, grün$\}$ operiert

$$D_8 := \langle \underbrace{(1,2,3,4)}_{\text{Drehen}}, \underbrace{(1,3)}_{\text{Spiegeln}} \rangle \leq S_4$$

wie folgt:

Für $u : \{1,2,3,4\} \to \{\text{rot}, \text{grün}\}$

und $f \in D_8$ sei

$$f \cdot u := u \circ f^{-1}$$

Beachte:
$$\begin{aligned} f \cdot (\tilde{f} \cdot u) &= f \cdot (u \circ \tilde{f}^{-1}) \\ &= u \circ \tilde{f}^{-1} \circ f^{-1} \\ &= u \circ (f \circ \tilde{f})^{-1} \\ &= (f \circ \tilde{f}) \cdot u \quad \text{für } f, \tilde{f} \in S_4 \end{aligned}$$

— ohne die Inversion würde dieses Gesetz nicht gelten.

25.05.20 - 14

Zwei Färbungen gelten als gleich, wenn sie in derselben Bahn unter D_8 liegen.

Wieviele Bahnen unter D_8 gibt es?

Das Fixpunktlemma bestimmt deren Anzahl zu

Menge der Abbildungen

$$k = \frac{1}{|D_8|} \sum_{f \in D_8} \mathrm{Fix}_f(X).$$

Dazu:

$D_8 = \{ id, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2),$

$(1,3), (1,4)(2,3), (2,4), (1,2)(3,4) \}$

25.05.20-1

- $\mathrm{Fix}_{id}(X) = X$

$$\Rightarrow |\mathrm{Fix}_{id}(X)| = 4^2 = 16$$

- $\mathrm{Fix}_{(1,2,3,4)}(X) = \left\{ \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \,,\; \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\}$

$$\Rightarrow |\mathrm{Fix}_{(1,2,3,4)}(X)| = 2$$

Dito $|\mathrm{Fix}_{(1,4,3,2)}(X)| = 2$

- $\mathrm{Fix}_{(1,3)(2,4)}(X) = \left\{ \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \,,\; \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \,,\; \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \,,\; \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\}$

$$\Rightarrow |\mathrm{Fix}_{(1,3)(2,4)}(X)| = 4$$

Dito $|\mathrm{Fix}_{(1,4)(2,3)}(X)| = 4$

$|\mathrm{Fix}_{(1,2)(3,4)}(X)| = 4$

- $\mathrm{Fix}_{(1,3)}(X) = \left\{ \begin{matrix}4&3\\1&2\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}4&3\\1&2\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}4&3\\1&2\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}4&3\\1&2\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}4&3\\1&2\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}4&3\\1&2\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}4&3\\1&2\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}4&3\\1&2\end{matrix} \right\}$

$\Rightarrow \quad |\mathrm{Fix}_{(1,3)}(X)| = 8$

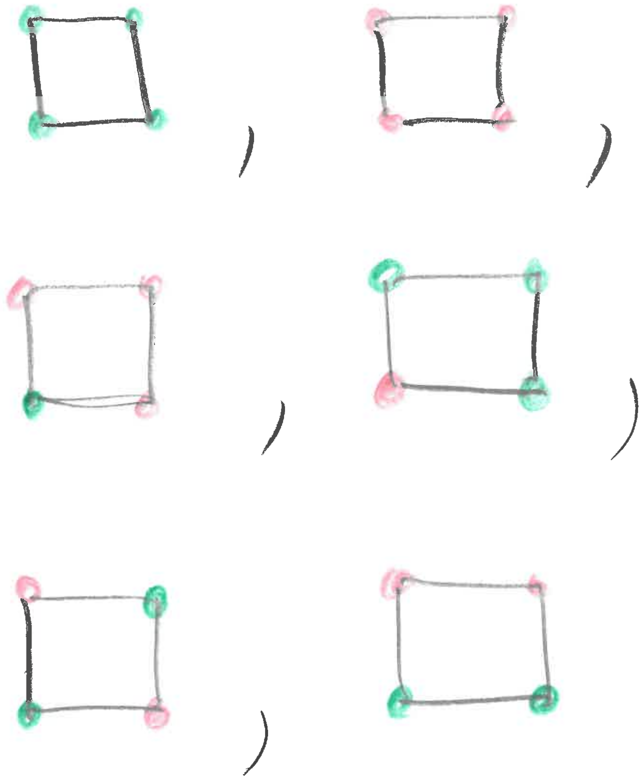
Dito $|\mathrm{Fix}_{(2,4)}(X)| = 8$

Also:

$$k = \frac{1}{8}\left(16 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8\right)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 48 = 6$$

Diese $k = 6$ Färbungen sind:



Diese Liste müssen wir uns aber direkt überlegen, das gibt das Fixpunktlemma nicht her.