Bsp für Ringhomomorphismus

$$S = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} ; \; a, b, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$T := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\varphi : S \longrightarrow T$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \longmapsto (a, d)$$

ist Ringhomomorphismus:

(1) $1_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\varphi}{\longmapsto} (1, 1) = 1_T$

(2) $$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}\right)$$

$$= \varphi\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ 0 & d+d' \end{pmatrix}$$

$$= (a+a', d+d')$$

$$= (a, d) + (a', d')$$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}\right)$$

für $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \in S$

(3) $$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}\right)$$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} aa' & ab'+bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix}\right)$$

$$= (aa', dd')$$

$$= (a, d) \cdot (a', d')$$

$$= \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \cdot \varphi\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}\right)$$

Es ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$

$$= \{ s \in S : \varphi(s) = 0_T \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in S : (a, d) = (0, 0) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$=: \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Insbesondere ist φ nicht injektiv. Aber φ ist surjektiv.

Es ist $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \trianglelefteq \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$

und wir haben nach Homomorphiesatz den Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto (a, d)$$

<u>Bsp</u> Wir haben den Ringmorphismus

$$\psi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f(X) \longmapsto f(\sqrt{2})$$

Dieser hat das Bild

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{ f(\sqrt{2}) : f(X) \in \mathbb{Q}[X] \}$$

$$= \{ a_n \sqrt{2}^n + \ldots + a_0 \sqrt{2}^0 : n \geq 0, \; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} \}$$

$$\overset{\sqrt{2}^2 = 2}{=} \{ a_1 \sqrt{2} + a_0 : a_0, a_1 \in \mathbb{Q} \}$$

Es ist $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{C}$

also ein $\mathbb{Q}$-Teilraum mit

Basis $(1, \sqrt{2})$

(wobei die lineare Unabh. schon aus $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ folgt)

21.04.2015

Es ist

$$(X^2-2) \cdot \mathbb{Q}[X] \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi),$$

da $\varphi(X^2-2)$

$$= \sqrt{2}^2 - 2 = 0 \text{ ist.}$$

Wir behaupten:

$$(X^2-2) \cdot \mathbb{Q}[X] \overset{!}{=} \mathrm{Kern}(\varphi).$$

Sei $f(X) \in \mathrm{Kern}(\varphi)$,

i.e. $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$\varphi(f(X)) = f(\sqrt{2}) = 0$$

Wir teilen mit Rest:

es gibt $q(X), r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit

$$f(X) = (X^2-2)\cdot q(X) + r(X),$$

wobei $\deg(r(X)) < \deg(X^2-2) = 2$

Einsetzen von $\sqrt{2}$:

$$0 = f(\sqrt{2}) = \underbrace{(\sqrt{2}^2-2)}_{=0}\cdot q(\sqrt{2}) + r(\sqrt{2})$$

$$= r(\sqrt{2})$$

Schreibe $r(X) = u_1 X + u_0$

mit $u_0, u_1 \in \mathbb{Q}$.

Da $0 = r(\sqrt{2})$

$= u_1 \sqrt{2} + u_0$

und da $(1, \sqrt{2})$ l.u. $/\mathbb{Q}$,

folgt $u_0 = u_1 = 0$

und also $r(X) = 0$.

Somit:

$$f(X) = (X^2-2) \cdot q(X) + 0$$

$$\in (X^2-2) \cdot \mathbb{Q}[X].$$

Der Homomorphiesatz gibt nun den Ringisomorphismus:

$$\mathbb{Q}[X] / (X^2-2)\,\mathbb{Q}[X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$$

$$f(X) + (X^2-2)\,\mathbb{Q}[X] \longmapsto f(\sqrt{2})$$

Man "braucht also $\mathbb{C}$ nicht, um $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ zu konstruieren", bis auf Isomorphie kann man auch die algebraische Konstruktion

$$\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)\,\mathbb{Q}[x]$$

verwenden.