Algebra

20.4.20 - 1

Willkommen!

Hier soll nicht das Skript handschriftlich wiedergegeben werden, sondern es sollen Kommentare und Beispiele ergänzt werden.

Schein:
- 50% der Punkte aus Hausaufgaben,
  möglichst als pdf-Upload → Abgabe via Ilias
- Bestehen der Scheinklausur. Termin folgt noch.

Diskussion:
- Forum im Ilias
- Email an mich

Heute: Def 1 – Bsp 11 — 20.4.20 – 2

Bem: Ring: "Wir haben (+), (−), (·) mit den üblichen Regeln, außer (·) kommutativ"

Bsp $R := \mathbb{Z}^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$

ist Ring

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a,b,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\subseteq R$

ist Teilring

S ist nicht kommutativ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\#$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $1_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es ist die Menge der invertierbaren Elemente:

$$U(S) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in S : \exists X \in S \text{ mit } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in S : a, d \in \{-1, +1\} \right\}$$

Bem: R: komm. Ring

Polynomring $R[X]$ besteht aus formalen Polynomen

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 X^0$$

mit $a_0, \dots, a_n \in R$.

Ein Polynom gibt Anlaß zu einer polynomialen Abbildung

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto a_n x^n + \dots + a_0 x^0 \end{aligned}$$

Unterschied: z.B. für

$$R = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

ist $X^2 + X \neq 0$ als Polynom, z.B. da $X^2 + X$ bei X^1 den Koeff. 1 hat.

Aber die zugehörige polynomiale Abbildung ist null:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 &\longrightarrow \mathbb{F}_2 \\ x &\longmapsto x^2 + x \\ 0 &\longmapsto 0^2 + 0 = 0 \\ 1 &\longmapsto 1^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

<u>Bsp</u> zu Satz 10:

$$f(X) = X^3 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}[X]$$

Nullstellen in $\mathbb{Q}$?

Multiplizieren mit 6, um Nenner wegzubekommen:

$$\tilde{f}(X) := 6X^3 + 3X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$$

Nullstellen in $\mathbb{Q}$: sind nach Descartes von der Form

$\frac{u}{v}$ gekürzt mit: u teilt 2, v teilt 6

Also $u \in \{1, 2, -1, -2\}$,

$v \in \{1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6\}$.

Also $$\frac{u}{v} \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 2, \frac{2}{3}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -2, -\frac{2}{3}\right\}$$

Werte bestimmen

$\frac{u}{v}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	2	$\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	-2	$-\frac{2}{3}$
$\tilde{f}\left(\frac{u}{v}\right)$	11	$\frac{17}{4}$	$\frac{29}{9}$	$\frac{91}{36}$	56	$\frac{52}{9}$	-7	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{53}{36}$	-52	$-\frac{16}{9}$

man kann auch ohne Rechnung erkennen, daß diese Werte > 0 sind

alle $\neq 0$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}(X)$ und also auch $f(X)$ haben keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$