<u>Ergänzung</u> zu Bsp 116.(3).

Es ist $G = S_3$ und

$$\varphi : G \longrightarrow S_G$$
$$g \longmapsto (x \mapsto {}^g x = g \cdot x \cdot g^{-1})$$

Wir wollen den Kern von φ berechnen, der auch die Bezeichnung

$$Z(G) = \mathrm{Kern}(\varphi)$$

trägt und <u>Zentrum</u> von G heißt.

Es wurde $Z(G) \overset{!}{=} 1 = \{id\}$ behauptet in Bsp 116.(3).

Dies wollen wir überprüfen.

Es ist

$$
\begin{aligned}
Z(G) &= \operatorname{Kern}(\varphi) \\
&= \{ g \in G : \varphi(g) = 1_{S_G} = \mathrm{id}_G \} \\
&= \{ g \in G : \text{die Abbildung } x \longmapsto {}^g x \text{ ist die Identität auf } G \} \\
&= \{ g \in G : {}^g x = x \text{ für } x \in G \} \\
&= \{ g \in G : gx = xg \text{ für } x \in G \}
\end{aligned}
$$

Wir verwenden die vorletzte Charakterisierung.

Es ist

$$(1,2,3)(2,3) = (3,1) = (1,3) \neq (2,3)$$

$$\Rightarrow (1,2,3) \notin Z(G)$$

Die Untergruppen von S_3 sind:

$$1, \langle(1,2)\rangle, \langle(1,3)\rangle, \langle(2,3)\rangle,$$

$$\langle(1,2,3)\rangle, \quad S_3$$

Davon sind nur

$$1, \langle(1,2,3)\rangle, S_3$$

Normalteiler.

Da $Z(G) \trianglelefteq S_3$ (als Kern)

und da $(1,2,3) \notin Z(G)$, folgt

$Z(G) = 1 = \{id\}$.

Bsp zum Begriff G-Menge. 19.05.2014

Es ist S_4 eine S_4-Menge, wobei die Operation durch Konjugation gegeben sei.

Die Bahnen heißen auch Konjugationsklassen und sind gegeben durch:

$$^{S_4}\mathrm{id} = \{\mathrm{id}\}$$

z.B.: $^{(2,4)}(1,2) = (1,4)$

$$^{S_4}(1,2) = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}.$$

19.05.20-5

$${}^{S_4}(1,2,3) = \{(1,2,3),(1,3,2),(1,2,4),(1,4,2),(1,3,4),(1,4,3),(2,3,4),(2,4,3)\}$$

z.B.:

$${}^{(2,3,4)}(1,2,3) = (1,3,4)$$

$${}^{S_4}(1,2)(3,4) = \{(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$$

$${}^{S_4}(1,2,3,4) = \{(1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,2,4),(1,3,4,2),(1,4,2,3),(1,4,3,2)\}$$

z.B.:

$${}^{(2,4,3)}(1,2,3,4) = (1,4,2,3)$$

Wir haben nun jedes der $4! = 24$ Elemente in einer Bahn gefunden.

Also haben wir die folgende disjunkte Zerlegung von S_4 in ihre Bahnen unter der Konjugationsoperation:

$$S_4 = {}^{S_4}\mathrm{id} \sqcup {}^{S_4}(1,2) \sqcup {}^{S_4}(1,2,3) \sqcup {}^{S_4}(1,2)(3,4) \sqcup {}^{S_4}(1,2,3,4).$$

Wir haben in S_4 also fünf Konjugationsklassen.

Für ein Element x einer Gruppe G ist übrigens genau dann $x \in Z(G)$, wenn $|{}^G x| = 1$ ist.

Da bei uns nun

$$|{}^{S_4} \mathrm{id}| = 1$$

$$|{}^{S_4}(1,2)| = 6$$

$$|{}^{S_4}(1,2,3)| = 8$$

$$|{}^{S_4}(1,2)(3,4)| = 3$$

$$|{}^{S_4}(1,2,3,4)| = 6$$

ist, liegt also nur id in einer Äquivalenzklasse, die aus einem Element besteht. Es folgt also auch:

$$Z(S_4) = \{id\} = 1$$

<u>Bem</u> zur Äquivalenzklassenbildung in Definition 121.

Sei G eine Gruppe. Sei X eine G-Menge. Verifizieren wir einmal, daß

$$x \sim \tilde{x} \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists g \in G \text{ mit } g \cdot x = \tilde{x}$$

für $x, \tilde{x} \in X$ tatsächlich ...

... eine Äquivalenzrelation ($\sim$)

auf X definiert.

- Reflexiv: Sei $x \in X$ gegeben. Es ist $x \sim x$, da $1 \cdot x = x$.

- Symmetrisch: Seien $x, \tilde{x} \in X$ mit $x \sim \tilde{x}$ gegeben. Dann können wir ein $g \in G$ wählen mit $g \cdot x = \tilde{x}$. Dann aber ist auch

$$g^{-1} \cdot \tilde{x} = g^{-1} \cdot g \cdot x = 1 \cdot x = x,$$

mithin also $\tilde{x} \sim x$.

- <u>Transitiv</u>: Seien $x, \tilde{x}, \tilde{\tilde{x}} \in X$ mit $x \sim \tilde{x}$ und $\tilde{x} \sim \tilde{\tilde{x}}$ gegeben. Dann können wir $g, h \in G$ wählen mit $g \cdot x = \tilde{x}$ und $h \cdot \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$.

Dann aber ist

$$(h \cdot g) \cdot x = h \cdot \tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$$

und also $x \sim \tilde{\tilde{x}}$.