Bsp zu Konjugation in S_n.

Konjugation eines Elements in Zykeldarstellung mit einem Element $f \in S_n$ geschieht durch Anwenden von f auf die Zykeleinträge.

• Def: $^{(1,3)}(1,2,3,4) := (1,3) \circ (1,2,3,4) \circ (1,3)^{-1}$

$$= (1,3) \circ (1,2,3,4) \circ (1,3)$$

Rechnung: $^{(1,3)}(1,2,3,4) = (3,2,1,4)$

$$= (1,4,3,2)$$

- Definition:

$${}^{(1,3,2)(4,5)}\Big(1,9,3,5\Big)\Big(2,8,7,6,4\Big)$$

$$:= (1,3,2)(4,5) \circ (1,9,3,5)(2,8,7,6,4) \circ \Big((1,3,2)(4,5)\Big)^{-1}$$

$$= (1,3,2)(4,5) \circ (1,9,3,5)(2,8,7,6,4) \circ (1,2,3)(4,5)$$

Rechnung:

$${}^{(1,3,2)(4,5)}\Big(1,9,3,5\Big)\Big(2,8,7,6,4\Big)$$

$$= (3,9,2,4)(1,8,7,6,5)$$

<u>Bsp</u> zu Konjugation in S_6

und Normalteiler

Es ist $U := \langle (1,2,3,4,5,6) \rangle$

$= \{ (1,2,3,4,5,6)^k : k \in [0, 6-1] \}$

Ordnung ist 6

$= \{ \mathrm{id}, (1,2,3,4,5,6),$

$(1,3,5)(2,4,6), (1,4)(2,5)(3,6),$

$(1,5,3)(2,6,4), (1,6,5,4,3,2) \}$

eine Untergruppe von S_6,

also $U \leq S_6$.

Es ist aber U kein Normalteiler von S_6, denn es gibt ein $f \in S_6$ und ein $u \in U$ mit $^{f}u \notin U$:

$$^{(1,2)}(1,2,3,4,5,6) = (2,1,3,4,5,6)$$
$$= (1,3,4,5,6,2)$$
$$\notin U$$

<u>Bsp</u> zu Konjugation und Homomorphiesatz

① Seien $a := (1,2,3,4)$, $b := (1,3) \in S_4$.

Es ist ${}^{b}(a^{-1})$

$$= {}^{(1,3)}(1,4,3,2)$$

$$= (3,4,1,2)$$

$$= (1,2,3,4) = a$$

Also: $b \circ a^{-1} = a \circ b$

Menge aller Produkte in a, b, wie z.B. $a \circ b \circ a \circ a \circ b$

$$\Rightarrow \; U := \langle a, b \rangle$$

$$= \{ a^i \circ b^j : i \in [0,3], \; j \in [0,1] \}$$

$$= \{ a^0, a^1, a^2, a^3, \; a^0 \circ b, a^1 \circ b, a^2 \circ b, a^3 \circ b \}$$

(2) Sei $V := \langle a \rangle$

$$= \{ a^0, a^1, a^2, a^3 \}.$$

Es ist $V \leqslant U$.

Wir wollen $V \trianglelefteq U$ zeigen.

Zz: ${}^{u}V = V$ für $u \in U$.

Gzz: ${}^{u}v \in V$ für $u \in U$, $v \in V$.

Schreibe $v = a^k$, mit $k \in [0,3]$

$u = a^i \circ b^j$, mit $i \in [0,3]$, $j \in [0,1]$

Dann:

$${}^{u}v = {}^{a^i \circ b^j}\left(a^k\right)$$

$$= \ldots$$

$$\ldots = \left({}^{a^i \circ b^j} a\right)^k$$

Konj. mit $a^i \circ b^j$ ist Gruppenmorph.

$$= \left({}^{a^i}\left({}^{b^j} a\right)\right)^k$$

$$= \left({}^{a^i}\left(a^{(-1)^j}\right)\right)^k$$

$$= \left({}^{a^i} a\right)^{(-1)^j \cdot k}$$

$$= a^{(-1)^j \cdot k} \in V$$

Wir haben also die Faktorgruppe U/V, von Ordnung

$$|U/V| = |U|/|V| = 8/4 = 2.$$

Es ist

$$U/V = \{ \overbrace{\mathrm{id}\, V}^{=\mathrm{id}_{U/V}} ,\ b V \},$$

und dabei ist $(bV)^2 = b^2 V$

$$= \mathrm{id}\, V,$$

Somit ist U/V eine zyklische Gruppe von Ordnung 2.

③ Wir haben den Gruppenmorphismus:

$$\begin{tikzcd}
u & S_4 \arrow[r, "\mathrm{sgn}"] & U(\mathbb{Z}) = \{-1, +1\} \\
u \arrow[u, mapsto] & U \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\varphi := \mathrm{sgn} \circ \iota$$
$$= \mathrm{sgn}|_U$$

ι: Inklusion

Wir berechnen $W := \mathrm{Kern}(\varphi)$:

Es ist $\mathrm{sgn}(a) = \mathrm{sgn}((1,2,3,4))$

$= -1$

Es ist $\mathrm{sgn}(b) = \mathrm{sgn}((1,3))$

$= -1$

Also

$$\begin{aligned}
U &\xrightarrow{\varphi = \mathrm{sgn}|_U} U(\mathbb{Z}) \\
a^0 &\longmapsto +1 \\
a^1 &\longmapsto -1 \\
a^2 &\longmapsto +1 \\
a^3 &\longmapsto -1 \\
a^0 \circ b &\longmapsto -1 \\
a^1 \circ b &\longmapsto +1 \\
a^2 \circ b &\longmapsto -1 \\
a^3 \circ b &\longmapsto +1
\end{aligned}$$

18.05.2010

Somit

$$W = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{ \underbrace{a^0}_{=id}, a^2, a \circ b, a^3 \circ b \}$$

$$= \langle a^2, a \circ b \rangle$$

Es ist φ surjektiv:

$$\varphi(id) = +1, \quad \varphi(a) = -1$$

Homomorphiesatz: Wir haben einen Gruppen isomorphismus

$$\mathcal{U}/W \xrightarrow[\sim]{\overline{\varphi}} \varphi(\mathcal{U}) = U(\mathbb{Z}) = \{-1, +1\}$$

$$uW \longmapsto \overline{\varphi}(uW) = \varphi(u)$$

$$id\,W \longmapsto +1$$

$$a\,W \longmapsto -1$$

(4) Allgemein gilt für eine endl. Gruppe G und Normalteiler $M, N \trianglelefteq G$:

Es ist auch $M \cap N \trianglelefteq G$.

Denn für $x \in G$ und $y \in M \cap N$ wird:

${}^{x}y \in M$ wegen $y \in M \trianglelefteq G$

${}^{x}y \in N$ wegen $y \in N \trianglelefteq G$

Also: ${}^{x}y \in M \cap N$.

(5) Bei uns wird:

$$V \trianglelefteq \mathcal{U}, \qquad W \trianglelefteq \mathcal{U}$$

Kerne sind immer Normalteiler

(4)
$$\Rightarrow \quad \underset{\{id,\, a^2\} \,=\, \langle a^2 \rangle}{\overset{}{V \cap W}} \trianglelefteq \mathcal{U}$$

$$V \cap W = \{id,\, a^2\} = \langle a^2 \rangle$$

laut Bemerkung 109 ist

$$V/(V \cap W) \xrightarrow[\sim]{?} VW/W$$

$$v(V \cap W) \longmapsto vW$$

Was heißt das hier?

Es ist

$$VW = \{ v \circ w : v \in V, w \in W \}$$

$$\leqslant U$$

Man könnte das durch Bestimmen

von $|V| \cdot |W| = 16$ Produkten

ausrechnen.

Man kann aber auch argumentieren:

$$V \underset{\substack{\uparrow \\ W \not\leq V}}{<} VW \leqslant U$$

$$\Rightarrow [U : VW] < [U : V] = 2$$

$$\Rightarrow [U : VW] = 1 \Rightarrow VW = U$$

Also:

$$\begin{tikzcd} V/(V\cap W) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, equal] & VW/W \arrow[d, equal] \\ \langle a\rangle/\langle a^2\rangle & \langle a,b\rangle/\langle a^2, a\circ b\rangle \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{id}\,\langle a^2\rangle \longmapsto \mathrm{id}\,W$$

$$a\,\langle a^2\rangle \longmapsto a\,W$$

(6) Zusammen:

$$V/(V\cap W) \xrightarrow[\sim]{\varphi} VW/W = U/W \xrightarrow[\sim]{\bar\varphi} \{-1,+1\}$$

$$\mathrm{id}\,\langle a^2\rangle \longmapsto \mathrm{id}\,W \longmapsto +1$$

$$a\,\langle a^2\rangle \longmapsto a\,W \longmapsto -1$$

<u>Bsp</u> zu Untergruppen zyklischer Gruppen.

Sei G eine zyklische Gruppe von Ordnung 8, also

$$G = \langle x \rangle \quad , \quad |G| = |\langle x \rangle| = 8$$

Dann hat G folgende U'gr. (und nur die):

Untergruppe	Ordnung
$\langle x^8 \rangle = \langle 1 \rangle$	1
$\langle x^4 \rangle$	2
$\langle x^2 \rangle$	4
$\langle x \rangle = G$	8

<u>Bsp</u> zu Cayley.

Sei $G := GL_2(\mathbb{F}_3)$.

Es ist $|G| = (3^2-1)(3^2-3)$
$= 8 \cdot 6 = 48$

Cayley gibt einen injektiven Gruppenmorphismus

$|G| = 48$

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & S_G & \cong & S_{48} \\ x & \longmapsto & \left(\begin{array}{c} G \to G \\ g \mapsto x \cdot g \end{array}\right) & & \end{array}$$

$|G| = 48$

$|S_{48}| = 48!$
$\approx 1{,}2 \cdot 10^{61}$

$\Rightarrow$ Cayley ist nicht immer gut praktisch anwendbar