Bsp zu algebraischem Abschluß.

Es ist $\mathbb{C} \mid \mathbb{R}$ ein algebraischer Abschluß, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist und da jedes Element von $\mathbb{C}$ algebraisch ist über $\mathbb{R}$.

Sei $L \mid \mathbb{R}$ eine endliche Erweiterung. Dann gibt es einen Körpermorphismus

$$\varphi : L \longrightarrow \mathbb{C}$$

über $\mathbb{R}$, d.h. mit $\varphi(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$; vgl. Lemma 252.

Insbesondere ist φ eine injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

Also ist

$\dim_{\mathbb{R}} L \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Also ist $\dim_{\mathbb{R}} L \in \{1, 2\}$.

Falls $\dim_{\mathbb{R}} L = 1$ ist,

dann ist $L = \mathbb{R}$.

Falls $\dim_{\mathbb{R}} L = 2$ ist, dann

ist φ eine injektive $\mathbb{R}$-lineare

Abbildung von einem

$\mathbb{R}$-Vektorraum der

Dimension 2 nach einem

Vektorraum der Dimension 2.

Also ist φ bijektiv.

Also ist $L \cong \mathbb{C}$.

Kurz: $L | \mathbb{R}$ endlich

$\Longrightarrow$ $L = \mathbb{R}$ oder $L \cong \mathbb{C}$.

<u>Bsp</u> Noch ein Aspekt von $\mathbb{R}$.

Sei $G \leqslant U(\mathbb{R})$ eine endliche Untergruppe.

Wir schreiben $n := |G|$.

Es ist die Ordnung

von jedem Element von G ein Teiler von n.

Mithin ist $x^n - 1 = 0$ für $x \in G$.

Aber $X^n - 1$ hat nur die Nullstellen -1 und $+1$, wenn n gerade ist, und nur die Nullstelle $+1$, wenn n ungerade ist.

(Schnitt von $\{e^{2\pi i k/n} : k \in [0, n-1]\}$ mit $\mathbb{R}$.)

Also ist $G \subseteq \{-1, +1\}$.

Somit sind $\{+1\}$ und $\{-1, +1\}$ die einzigen endlichen Untergruppen von $U(\mathbb{R})$.

Beide sind zyklisch, wie von Korollar 207 vorausgesagt.

Bsp Sei K ein Körper.

Wir betrachten die Körpererweiterung $K(T) \mid K$.

Sei $A := \{ \xi \in K(T) : \xi$ ist algebraisch über $K \}$.

Dann ist $K(T) \mid A \mid K$, d.h. A ist ein Zwischenkörper von $K(T)$ und K; vgl. Bemerkung 249. (1).

Wir behaupten: $A \overset{!}{=} K$.

Sei $\xi \in A^\times$. Zz: $\xi \overset{!}{\in} K$.

Schreibe $\xi = \dfrac{u(T)}{v(T)}$ mit

$u(T), v(T) \in K[T]^\times$

teilerfremd. Zz: Es gibt kein irreduzibles normiertes Polynom, das $u(T)$ oder

$v(T)$ teilt!

Denn dann sind beide

Polynome von Grad 0 und

folglich $\xi \in K$.

Jetzt kommt das Argument für Descartes, auf diesen Fall übertragen

<u>Annahme</u>, $w(T)$ ist ein

normierter irreduzibler Teiler

von $u(T)$ oder von $v(T)$.

Da $\xi = \dfrac{u(T)}{v(T)}$ algebraisch ist

über K, gibt es

$$\mu_{\xi,K}(X) =: X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + \underbrace{a_0}_{\neq 0} X^0$$

$$\in K[X]$$

mit ...

13.07.2018

$$\ldots \quad 0 = \mu_{\xi,K}(\xi)$$

$$= \frac{u(T)^n}{v(T)^n} + a_{n-1}\frac{u(T)^{n-1}}{v(T)^{n-1}} + \ldots + a_0 \frac{u(T)^0}{v(T)^0}$$

Durchmultiplizieren mit $v(T)^n$:

$$(*)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = \; & u(T)^n v(T)^0 + a_{n-1} u(T)^{n-1} v(T)^1 \\ & + \ldots + a_0 u(T)^0 v(T)^n \end{aligned} \right.$$

<u>Fall</u>: $w(T)$ teilt $u(T)$.

Dann folgt aus $(*)$, daß $w(T)$ auch $a_0 v(T)^n$ und also $v(T)$ teilt. ↯

<u>Fall</u>: $w(T)$ teilt $v(T)$.

Dann folgt aus $(*)$, daß $w(T)$ auch $u(T)^n$ und also $u(T)$ teilt. ↯

Wobei der Widerspruch

beidemale aus $u(T)$, $v(T)$

teilerfremd resultiert