Bsp für Isomorphie von Gruppen

In S_3 ist

$\circ$	id	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(2,3)	(1,3)
id	id	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(2,3)	(1,3)
(1,2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	id	(1,3)	(1,2)	(2,3)
(1,3,2)	(1,3,2)	id	(1,2,3)	(2,3)	(1,3)	(1,2)
(1,2)	(1,2)	(2,3)	(1,3)	id	(1,2,3)	(1,3,2)
(2,3)	(2,3)	(1,3)	(1,2)	(1,3,2)	id	(1,2,3)
(1,3)	(1,3)	(1,2)	(2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	id

In $GL_2(\mathbb{F}_2)$

$(\cdot)$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Es ist die bijektive Abbildung

$$\begin{array}{ccc} S_3 & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & GL_2(\mathbb{F}_2) \\ id & \longmapsto & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ (1,2,3) & \longmapsto & \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} \\ (1,3,2) & \longmapsto & \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} \\ (1,2) & \longmapsto & \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \\ (2,3) & \longmapsto & \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \\ (1,3) & \longmapsto & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \end{array}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Dies kann man durch Vergleich der Multiplikations-tafeln auf 12.05.20 – 1, 2 erkennen: wählt man die Reihenfolgen der Elemente passend zur obigen Bijektion φ, so zeigt die Einfärbung der Tafeln, daß stets

$$\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$$

gilt, für $f, g \in S_3$.

Es ist φ aber nicht der einzige Isomorphismus* von S_3 nach $GL_2(\mathbb{F}_2)$:

* kurz für "Gruppenisomorphismus"

Wir haben z.B. den inneren Automorphismus* ψ auf $GL_2(\mathbb{F}_2)$, der durch Konjugation mit $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ gegeben ist:

$$\begin{aligned}
GL_2(\mathbb{F}_2) &\xrightarrow[\sim]{\psi} GL_2(\mathbb{F}_2)\\
A &\longmapsto {}^{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}A\\
&\qquad = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\\
&\qquad = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beachte:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d&c\\b&a\end{pmatrix}.$$

* kurz für "Gruppenautomorphismus"

Also

$$
\begin{aligned}
GL_2(\mathbb{F}_2) &\xrightarrow[\sim]{\psi} GL_2(\mathbb{F}_2) \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir als einen weiteren Isomorphismus:

$$S_3 \xrightarrow[\sim]{\psi \circ \varphi} GL_2(\mathbb{F}_2)$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{id} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(1,2,3) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
(1,3,2) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
(1,2) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
(2,3) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(1,3) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Bsp für Permutationsmatrix

$$f = (1,3,5)\,(2,4) \in S_6$$

$$\Rightarrow P(f) = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & & & & & \\ 2 & & & & & & \\ 3 & & & & & & \\ 4 & & & & & & \\ 5 & & & & & & \\ 6 & & & & & & \end{array} \!$$

$$P(f) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bsp für Signum

$$\operatorname{sgn}\Big((1,3,2,5)\,(7,4,6)\,(11,13) \Big)$$

$$= (-1)^{(4-1)+(3-1)+(2-1)}$$

$$= (-1)^6 = +1$$

Also $(1,3,2,5)\,(7,4,6)\,(11,13) \in A_{13}$.

<u>Bem</u> zu det und sgn

Wir haben ein Diagramm aus Gruppen und Gruppenmorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\{-1,+1\} \arrow[r, equal] & U(\mathbb{Z}) \\
S_n \arrow[u, "\mathrm{sgn}"] \arrow[r, "P"] & GL_n(\mathbb{Z}) \arrow[u, "\det"'] \\
A_n \arrow[u] \arrow[r, "P'"] & SL_n(\mathbb{Z}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind $A_n \longrightarrow S_n$ und $SL_n(\mathbb{Z}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z})$ die Inklusionsmorphismen.

Ferner ist $P' = P\Big|_{A_n}^{SL_n(\mathbb{Z})}$

die Einschränkung von P,