Bsp zur Ordnung von Elementen in symmetrischen Gruppen

In S_5 haben wir Elemente der folgenden Form, wobei $\{a,b,c,d,e\} = \{1,2,3,4,5\}$.

(1) $(a)(b)(c)(d)(e) = id$

Ordnung : $kgV(1,1,1,1,1) = 1$

(2) $(a,b)(c)(d)(e) = (a,b)$

Ordnung : $kgV(2,1,1,1) = 2$

(3) $(a,b)(c,d)(e) = (a,b)(c,d)$

Ordnung : $kgV(2,2,1) = 2$

(4) $(a,b,c)(d)(e) = (a,b,c)$

Ordnung : $kgV(3,1,1) = 3$

...

111

(5) $(a,b,c)(d,e)$

Ordnung : $kgV(3,2) = 6$

(6) $(a,b,c,d)(e) = (a,b,c,d)$

Ordnung : $kgV(4,1) = 4$

(7) (a,b,c,d,e)

Ordnung : $kgV(5) = 5$

Bsp Liegt in einer Gruppe G ein Produkt zweier Elemente x, y vor, so haben die Ordnungen

$$|\langle x \rangle|, \quad |\langle y \rangle|, \quad |\langle x \cdot y \rangle|$$

i.a. nichts miteinander zu tun.

z.B. : $G = S_3$, $x = (1,2)$, $y = (2,3)$.

Es ist $x \circ y = (1,2) \circ (2,3)$

$= (1,2,3)$

und also

$|\langle x \rangle| = 2, \quad |\langle y \rangle| = 2, \quad |\langle x \circ y \rangle| = 3$

Bsp. (zu Lagrange) Sei G eine Gruppe mit $|G| =: p$ prim.

Dann ist G zyklisch.

Denn wähle $x \in G \setminus \{1\}$.

Es ist $|\langle x \rangle|$ ein Teiler von $|G| = p$. Da $x \neq 1$ ist $|\langle x \rangle| > 1$. Es folgt $|\langle x \rangle| = p$ und also

$\langle x \rangle = G$.

Bsp zu kleinem Format

Sei $p = 5$

Es gilt $0^5 \equiv_5 0$.

Es gilt $1^5 \equiv_5 1$

Es gilt $2^5 = 32 \equiv_5 2$

Es gilt $3^5 = 243 \equiv_5 3$

Es gilt $4^5 \equiv_5 (-1)^5 = -1 \equiv_5 4$.

(Oder: $4^5 = 1024 \equiv_5 4$)

Bsp zu kleinem Format

Beweis gründet letztlich auf:

Ordnung von $x \in \mathbb{F}_p^\times$

ist ein Teiler von $|\mathbb{F}_p^\times| = p - 1$.

... Betrachten wir einmal die Ordnung von $x=2$ in $\mathbb{F}_p^\times$ bei variablem $p \geq 3$:

p	Ordnung von 2 in $\mathbb{F}_p^\times$	
3	2	$(2^2 = 4 \equiv_3 1)$
5	4	$(2^4 = 16 \equiv_5 1)$
7	3	$(2^3 = 8 \equiv_7 1)$
11	10	
13	12	
17	8	
19	18	
23	11	
29	28	
31	5	$(2^5 = 32 \equiv_{31} 1)$

Wir beobachten: Häufig ist die Ordnung von 2 in $\mathbb{F}_p^\times$ gleich $p-1$, es gibt aber Ausnahmen.

Regelmäßigkeit für diese Ausnahmen ist (mir) nicht bekannt.

Bsp für Normalteiler:

Sei $V := \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle$
$= \{ id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$
$\leq S_4$.

Wir behaupten: $V \overset{!}{\trianglelefteq} S_4$,

d.h. zeigen: $fV \overset{!!}{=} Vf$

für $f \in S_4$.

Wir wollen etwas Rechnung sparen.

Sei G eine Gruppe,

und sei $U \leq G$

mit $G = g_1 U \sqcup \dots \sqcup g_m U$,

wobei $g_1, \dots, g_m \in G$,

so wollen wir nachweisen:

$$\left(g_i U = U g_i \text{ für } i \in [1,m] \right)$$

$$\overset{!}{\Rightarrow} \left(U \leq G \right)$$

Sei $x \in G$. Es gibt genau ein $i \in [1,m]$ mit $x \in g_i U = U g_i$.

Schreibe $x = g_i u = v g_i$

mit $u, v \in U$.

Es folgt

$$\chi U = g_i \cdot_U U = g_i U$$

$$= U g_i = U \nu g_i = U \chi .$$

Also $U \trianglelefteq G$.

Somit suchen wir als erstes einmal die Linksnebenklassen von V in S_4 und rechnen dann $fV \overset{!}{=} Vf$ nur für die darin auftretenden Repräsentanten nach.

$$id\ V = \{ id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$$

$$\| $$

$$V\ id = \{ id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$$

z.B.: $(1,2) \circ (1,3)(2,4) = (1,3,2,4)$

$$(1,2)V = \{ (1,2), (3,4), (1,3,2,4), (1,4,2,3) \}$$

$$\| $$

$$V(1,2) = \{ (1,2), (3,4), (1,4,2,3), (1,3,2,4) \}$$

$$(1,3)V = \{ (1,3), (1,2,3,4), (2,4), (1,4,3,2) \}$$

$$\| $$

$$V(1,3) = \{ (1,3), (1,4,3,2), (2,4), (1,2,3,4) \}$$

$$(2,3)V = \{ (2,3), (1,3,4,2), (1,2,4,3), (1,4) \}$$

$$\| $$

$$V(2,3) = \{ (2,3), (1,2,4,3), (1,3,4,2), (1,4) \}$$

$$(1,2,3)V = \{(1,2,3), (1,3,4), (2,4,3), (1,4,2)\}$$

$$\| $$

$$V(1,2,3) = \{(1,2,3), (2,4,3), (1,4,2), (1,3,4)\}$$

$$(1,3,2)V = \{(1,3,2), (2,3,4), (1,2,4), (1,4,3)\}$$

$$\| $$

$$V(1,3,2) = \{(1,3,2), (1,4,3), (2,3,4), (1,2,4)\}$$

Man beobachte:

$$S_4 = \mathrm{id}\,V \sqcup (1,2)V \sqcup (1,3)V$$

$$\sqcup (2,3)V \sqcup (1,2,3)V \sqcup (1,3,2)V$$

– z.B. liegen in dieser disjunkten Vereinigung tatsächlich $24 = |S_4|$ Elemente.

Somit ist V ein Normalteiler von S_4, d.h.

$$V \trianglelefteq S_4 .$$

Die Faktorgruppe S_4/V hat Ordnung

$$6 = |S_4/V| = |S_4|/|V| = 24/4 .$$

Sie ist nicht abelsch: z.B. ist

$$((1,2)V)((2,3)V) = (1,2,3)V \neq (1,3,2)V = ((2,3)V)((1,2)V)$$