<u>Bsp</u> für endliche abelsche Gruppe:

Sei G eine abelsche Gruppe von Ordnung $|G| = 18 = 2 \cdot 3^2$

Dann ist $G \simeq C_2 \times C_3 \times C_3$

oder $G \simeq C_2 \times C_9$.

Ist also G eine abelsche Gruppe von Ordnung 18, die ein Element der Ordnung 9 enthält, dann ist $G \simeq C_2 \times C_9$

Insbesondere ist $C_{18} \simeq C_2 \times C_9$.

Tatsächlich können wir einen Isomorphismus angeben. Sei dazu $C_{18} = \langle a \rangle$, $C_2 = \langle b \rangle$, $C_9 = \langle c \rangle$ mit passend gewählten Elementen a, b, c.

Dann ist

$$\varphi : C_{18} \longrightarrow C_2 \times C_9$$
$$a^i \longmapsto (b^i, c^i)$$

ein Gruppenisomorphismus.

Um dies zu sehen, genügt es, φ als injektiv nachzuweisen.

Sei $i \in [0, 17]$ mit $a^i \overset{\varphi}{\longmapsto} (b^i, c^i) = (1, 1)$ gegeben. Zu zeigen ist $i \overset{!}{=} 0$.

Aber $b^i = 1 \iff i \equiv_2 0$,

$c^i = 1 \iff i \equiv_9 0$

Wegen $i \in [0, 17]$ liefert dies $i = 0$.

<u>Bsp</u> für endliche abelsche Gruppen

Sei G eine endliche abelsche Gruppe von Ordnung 30.

Dann ist $G \cong C_2 \times C_3 \times C_5$.

<u>Bsp</u> Vorsicht, z.B.

gewählte Erzeuger

$C_2 \times C_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$

enthält außer den Untergruppen

$\langle (a,1) \rangle$ und $\langle (1,b) \rangle$

von Ordnung 2 auch

noch die Untergruppe

$\langle (a,b) \rangle$ von Ordnung 2.

<u>Bsp</u> Sei G eine endliche abelsche Gruppe mit $|G| = 4$.

Dann ist $G \simeq C_2 \times C_2$

oder $G \simeq C_4$.

In beiden Fällen gibt es aber mehr als nur einen Gruppenisomorphismus.

gewählte Erzeuger

<u>Fall</u> $G \xrightarrow[\sim]{\varphi} C_2 \times C_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$

Wir haben z.B. den Gruppenisomorphismus

$$C_2 \times C_2 \xrightarrow[\sim]{\psi} C_2 \times C_2$$

$$(a^i, b^j) \longmapsto (a^j, b^i)$$

Es ist $\psi \neq \mathrm{id}_{C_2 \times C_2}$.

Also ist $\psi \circ \varphi \neq \varphi$, und auch $\psi \circ \varphi : G \xrightarrow{\sim} C_2 \times C_2$ ist ein Gruppenisomorphismus.

<u>Falls</u> $G \xrightarrow[\sim]{\varphi} C_4 = \langle c \rangle$.

Dann: $C_4 \xrightarrow[\sim]{\tau} C_4$

$c^i \longmapsto c^{-i}$

Und $\tau \neq \mathrm{id}_{C_4} \Rightarrow \tau \circ \varphi \neq \varphi$.

<u>Bsp</u> In S_9 betrachten wir:

$a := (1,2,3)$

$b := (4,5,6)$

$c := (7,8,9)$

$x := (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$.

Sei $U := \langle a, b, c, x \rangle$.

Sei $V := \langle a, b, c \rangle$.

Es gilt $V \simeq C_3 \times C_3 \times C_3$.

09.06.20-6

Es ist $\,^{x}a = \,^{(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)}(1,2,3)$

$= (4,5,6) = b$

Es ist $\,^{x}b = \,^{(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)}(4,5,6)$

$= (7,8,9) = c$

Es ist $\,^{x}c = \,^{(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)}(7,8,9)$

$= (1,2,3) = a.$

Insbesondere ist $xa = bx$,

$xb = cx$,

$xc = ax$

Zudem ist $a^3 = b^3 = c^3 = x^3 = \mathrm{id} = 1$

Ferner ist $ab = ba$, $ac = ca$, $ad = da$.

Also ist $\mathfrak{U} = \{ a^i b^j c^k x^l : i,j,k,l \in [0,2] \}$.

Da $x \notin V$, folgt $V < U$.

Da zudem $|V| = 3^3$ und $|U| \leq 3^4$, folgt: $|U| = 3^4$.

Es ist $|S_9| = 9!$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$

$$= 3^4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8$$

Folglich ist $U \in Syl_3(S_9)$,

d.h. es ist U eine 3-Sylow-gruppe von S_9.

Jedes Element von U läßt sich in der Form $a^i b^j c^k x^l$ schreiben mit <u>eindeutig</u> bestimmten Exponenten $i, j, k, l \in [0, 2]$.

Es ist U nicht abelsch,

da ${}^{x}a = b \neq a$.

Also ist $|Z(U)| \in \{1, 3, 9, 27\}$.

Da U eine 3-Gruppe ist,

ist $|Z(U)| \neq 1$, vgl. Lemma 162.

Also ist $|Z(U)| \in \{3, 9, 27\}$.

Wir wollen das Zentrum $Z(U)$

bestimmen.

Es ist ein Element $a^i b^j c^k x^l$

bereits dann im Zentrum $Z(U)$,

wenn es mit a, b, c und x

vertauscht bei Multiplikation.

- Es wird

$$(a^i b^j c^k x^\ell) \cdot x = a^i b^j c^k x^{\ell+1}$$

und

$$x \cdot (a^i b^j c^k \cdot x^\ell) = b^i c^j a^k \cdot x^{\ell+1}$$
$$= a^k b^i c^j x^{\ell+1}$$

Ist $a^i b^j c^k x^\ell \in Z(\mathcal{U})$,

dann ist also $i = k = j$

- Es wird

$$(a^i b^j c^k x^\ell)\, a = \begin{cases} a^{i+1} b^j c^k x^\ell & \text{falls } \ell = 0 \\ a^i b^{j+1} c^k x^\ell & \text{falls } \ell = 1 \\ a^i b^j c^{k+1} x^\ell & \text{falls } \ell = 2 \end{cases}$$

und

$$a \cdot (a^i b^j c^k x^\ell) = a^{i+1} b^j c^k x^\ell$$

Ist $a^i b^j c^k x^\ell \in Z(\mathcal{U})$,

dann ist also $\ell = 0$.

- Umgekehrt ist

$$a^i b^i c^i \in Z(\mathfrak{U})$$

für $i \in [0,2]$, da

$$(a^i b^i c^i)\, x \overset{\text{s.o.}}{=} x\, (a^i b^i c^i)$$

und sowieso

$$(a^i b^i c^i) \cdot a = a \cdot (a^i b^i c^i)$$

$$(a^i b^i c^i) \cdot b = b \cdot (a^i b^i c^i)$$

$$(a^i b^i c^i) \cdot c = c \cdot (a^i b^i c^i)$$

Zusammen: Es ist

$$Z(\mathfrak{U}) = \{ a^i b^i c^i : i \in [0,2] \}$$

$$= \langle abc \rangle$$

und also $|Z(\mathfrak{U})| = 3$.