08.06.20-1

Bem. zu den Lösungen zu Hausaufgabe 17:

Sei G eine Gruppe, sei $x \in G$.

Der Zentralisator

$$C_G(x) = \{ g \in G : gx = xg \}$$

ist eine Untergruppe von G.

Wenn man also feststellt, daß

$(1,2,3,4,5) \in C_{S_5}((1,2,3,4,5))$ liegt,

dann hat das

$$\langle (1,2,3,4,5) \rangle$$
$$= \{ id, (1,2,3,4,5), \underbrace{(1,2,3,4,5)^2}_{(1,3,5,2,4)}, \underbrace{(1,2,3,4,5)^3}_{(1,4,2,5,3)}, \underbrace{(1,2,3,4,5)^4}_{(1,5,4,3,2)} \}$$
$$\leq C_{S_5}((1,2,3,4,5))$$ zur Folge.

Und dann kann man noch mit einem weiteren Argument $\langle (1,2,3,4,5) \rangle = C_{S_5}((1,2,3,4,5))$ erkennen.

<u>Bsp</u> für direktes Produkt, Bem. 145.

Wir kennen schon die abelsche Gruppe

$$V := \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle \leq S_4$$

Es ist

$$V = \{ \mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3) \}$$

Es ist $M := \langle (1,2)(3,4) \rangle \trianglelefteq V$

$N := \langle (1,3)(2,4) \rangle \trianglelefteq V$

Es ist $M \cap N = 1 = \{ \mathrm{id} \}$

Es ist $|M| \cdot |N| = 2 \cdot 2 = 4 = |V|$.

Also haben wir den Gruppenisomorphismus

$$M \times N \xrightarrow{\sim} V$$

$$(m, n) \longmapsto m \cdot n$$

Bsp Diedergruppen

Es ist

$$D_{12} = \langle \underbrace{(1,2,3,4,5,6)}_{a}, \underbrace{(2,6)(3,5)}_{b} \rangle$$

Es ist $\;{}^{b}a = a^{-1}$

Also ist

$$D_{12} = \{ a^0b^0, a^1b^0, a^2b^0, a^3b^0, a^4b^0, a^5b^0, a^0b^1, a^1b^1, a^2b^1, a^3b^1, a^4b^1, a^5b^1 \},$$

da wegen $ba = a^{-1}b$ jedes Produkt in a, b in die Form

$a^i b^j$ mit $i \in [0,5]$, $j \in [0,1]$

gebracht werden kann.

Um in D_{12} zu rechnen, genügt es zu wissen: $a^6 = 1$, $b^2 = 1$, ${}^{b}a = a^{-1}$.

Wir wollen die Konjugationsklassen in D_{12} bestimmen.

$${}^{D_{12}}1 = \{1\}$$

${}^{D_{12}}a$: $${}^{a^ib^j}a = {}^{a^i}\left(a^{(-1)^j}\right) = a^{(-1)^j}$$

$$\Rightarrow {}^{D_{12}}a = \{a, a^{-1}\}$$
$$= \{a, a^5\}$$

${}^{D_{12}}a^2$: $${}^{a^ib^j}(a^2) = {}^{a^i}\left(a^{2\cdot(-1)^j}\right) = a^{2\cdot(-1)^j}$$

$$\Rightarrow {}^{D_{12}}(a^2) = \{a^2, a^{-2}\}$$
$$= \{a^2, a^4\}$$

${}^{D_{12}}a^3$: $${}^{a^ib^j}(a^3) = {}^{a^i}\left(a^{3\cdot(-1)^j}\right) = a^{3\cdot(-1)^j}$$
$$= a^3$$

$$\Rightarrow {}^{D_{12}}(a^3) = \{a^3\}$$

$${}^{D_{12}}b: \quad {}^{a^i b^j}b = {}^{a^i}b$$

$$= a^i \, b \, a^{-i}$$

$$= a^i \, (a^{-1})^{-i} \, b$$

$$= a^{2i} b$$

$$\Rightarrow \quad {}^{D_{12}}b = \{ b, \; a^2 b, \; a^4 b \}$$

$${}^{D_{12}}(ab): \quad {}^{a^i b^j}(ab) = {}^{a^i b^j}a \cdot {}^{a^i b^j}b$$

$$\overset{s.o.}{=} a^{(-1)^j} \cdot a^{2i} b$$

$$\Rightarrow \quad {}^{D_{12}}ab = \{ ab, \; a^3 b, \; a^5 b \}$$

Also:

$$D_{12} = {}^{D_{12}}1 \sqcup {}^{D_{12}}a \sqcup {}^{D_{12}}(a^2) \sqcup {}^{D_{12}}(a^3)$$

$$\sqcup \; {}^{D_{12}}b \sqcup {}^{D_{12}}(ab)$$

$$= \{1\} \sqcup \{a, a^5\} \sqcup \{a^2, a^4\} \sqcup \{a^3\}$$

$$\sqcup \; \{b, a^2 b, a^4 b\} \sqcup \{ab, a^3 b, a^5 b\}$$

Wir erkennen noch das Zentrum:

$$Z(D_{12}) = \{1, a^3\}$$

Wir können mit obiger Rechnung noch einen Zentralisator bestimmen:

z.B. $C_{D_{12}}(b) = \{ a^i b^j : i \in [0,5], j \in [0,1], {}^{a^i b^j} b = b \}$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \{ a^i b^j : i \in [0,5], j \in [0,1], a^{2i} b = b \}$$

$$= \{ a^i b^j : i \in [0,5], j \in [0,1], i \equiv_3 0 \}$$

$$= \{ a^0 b^0, a^3 b^0, a^0 b^1, a^3 b^1 \}$$

$$= \langle a^3, b^1 \rangle .$$

Das paßt zur Aussage des Bahnenlemmas: ...

$$\left| D_{12} / C_{D_{12}}(b) \right| \overset{\text{Bahnen-}}{\underset{\text{lemma}}{=}} \left| {}^{D_{12}} b \right|$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$|D_{12}| / |C_{D_{12}}(b)| \qquad\qquad |\{b, a^2 b, a^4 b\}|$$

$$\|\ \text{s.o.} \qquad\qquad\qquad \|$$

$$12 / 4 \qquad\qquad\qquad\qquad 3$$

$$\|$$

$$3$$

<u>Bsp</u> zu Elementarteilersatz

Sei $A := \begin{pmatrix} -4 & -4 & 5 \\ -7 & -7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 3}$

Gesucht: $S \in GL_2(\mathbb{Z})$, $T \in GL_3(\mathbb{Z})$

mit $SAT = D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \end{pmatrix}$,

wobei $(x_1) \supseteq (x_2)$

(wobei wir hier die Möglichkeit zulassen, daß $x_i = 0$ werden kann).

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 5 \\ -7 & -7 & 8 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}(-)}{\rightsquigarrow} \begin{array}{ccc} & -1 & 1 \\ \hline \end{array}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

-2

$$\overset{(-)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4

1

$$\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \overset{(-)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0 \quad -3} \end{pmatrix}$$

jetzt mit diesem Block fortfahren

$$\overset{(-)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Fertig. Es ist nicht verlangt, daß die Diagonal-einträge alle ≥ 0 sein müssen.

Auswerten:

Von links haben wir gebraucht:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Von rechts haben wir gebraucht:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probe: Tatsächlich ist

$$SAT = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 5 \\ -7 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

und $(1) \supseteq (-3)$

als Ideale von $\mathbb{Z}$.