<u>Bsp</u> zu Poset

Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$

Sei $T = \{ k \in [1,n] : n \equiv_k 0 \}$

die Menge der Teiler von n.

Wir haben auf T die Relation

$(\,|\,)$ ("teilt"), definiert durch

$$k \,|\, l \quad :\Longleftrightarrow \quad l \equiv_k 0$$

Formal ist

$$(\,|\,) := \{ (k,l) : l \equiv_k 0 \} \subseteq T \times T.$$

Eine Relation auf T ist mengentheoretisch eine Teilmenge von $T \times T$.

Überprüfen wir die an (1) geforderten Eigenschaften.

<u>Reflexiv:</u> $k \mid k$ für $k \in T$

<u>Identitiv:</u> Ist $k \mid l$ und $l \mid k$,

dann gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $l = ak$ und ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $k = bl$.

Also $l = ak = abl$

Also $ab = 1$.

Da $l = ak$ und $l, k \geq 1$, folgt $a \geq 1$.

Zusammen folgt also $a = 1$.

Somit ist $l = k$.

<u>Transitiv</u>: Seien $k, l, m \in T$ mit $k \mid l$ und $l \mid m$ gegeben. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $l = ak$ und ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $m = bl$. Es folgt

$$m = bl = \underbrace{(ba)}_{\in \mathbb{Z}} k .$$

Also ist $k \mid m$.

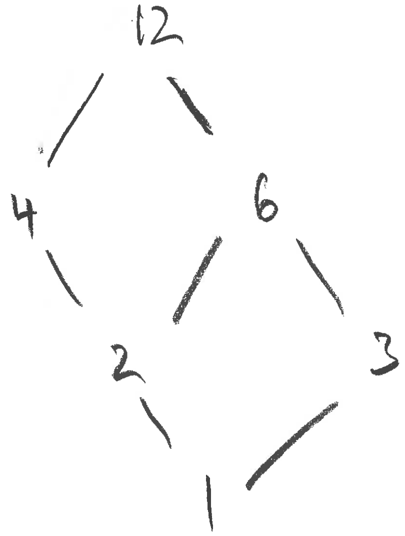
<u>Bsp</u> zu Posets, Fortsetzung des vorigen.

Sei $n = 12$.

Die Menge der Teiler von 12 ergibt sich zu

$$T = \{1, 2, 4, 3, 6, 12\}$$

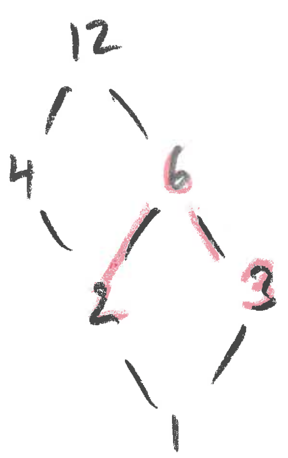
Das Poset T kann man wie folgt graphisch andeuten:



Darin teilt nun das Element k das Element l, falls man von k den Verbindungen entlang nach oben zu l laufen kann.

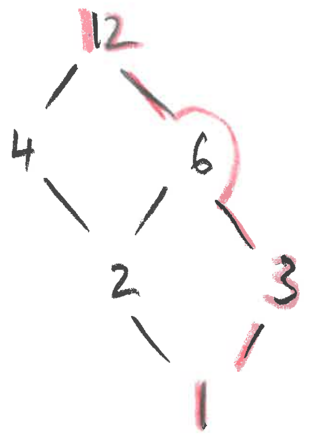
Eine Kette in T war nun eine linear geordnete Teilmenge von T.

- Z.B. ist $\{2, 3, 6\}$ <u>keine</u> Kette in T:



Es sind nämlich 2 und 3 nicht vergleichbar: $2 \nmid 3$ und $3 \nmid 2$.

• z.B. ist $\{1, 3, 12\}$ eine Kette in T:



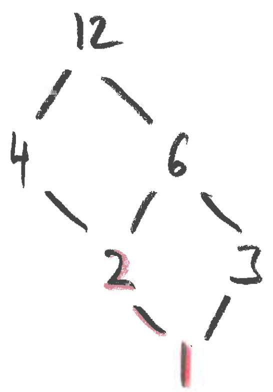
„6 wird übersprungen"

Je zwei Elemente von $\{1, 3, 12\}$ sind vergleichbar:

$$1 \mid 3$$

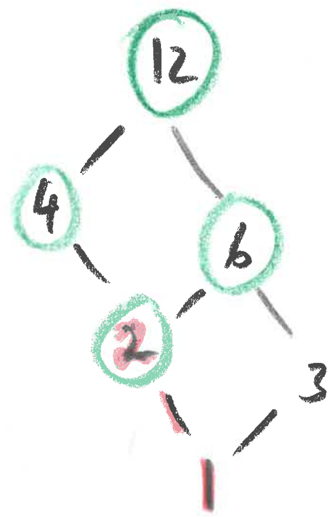
$$3 \mid 12$$

• z.B. ist $\{1, 2\}$ eine Kette in T:



Obere Schranken für $\{1,2\}$ sind:

$2, 4, 6, 12$

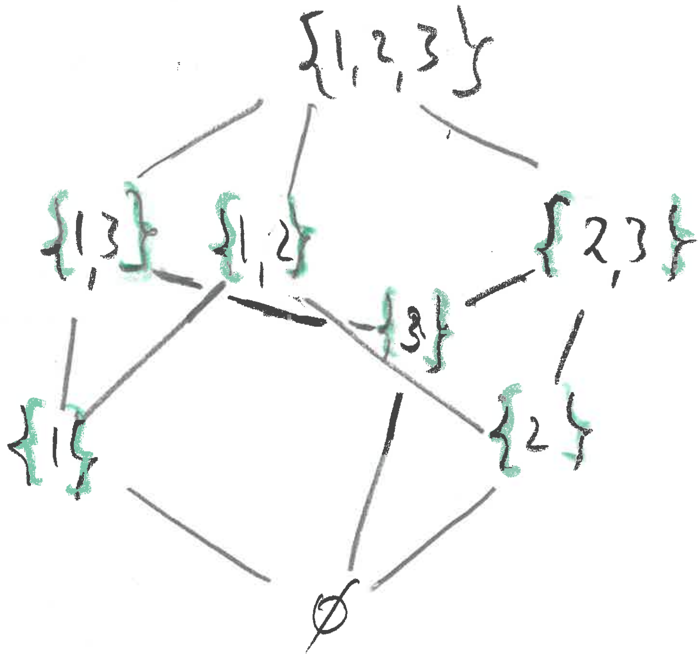


Bsp für minimal, initial,
maximal, terminal

Es ist $Pot(\{1,2,3\})$

$= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\},$
$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

zusammen mit $(\subseteq)$ ein Poset.



Es ist auch

$X := \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}$

$\subseteq \mathrm{Pot}(\{1,2,3\})$

ein Poset.

Die minimalen Elemente von X

sind $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

Aber es hat X kein ...

... initiales Element.

Die maximalen Elemente von X sind $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$.

Aber es hat X kein terminales Element.

<u>Bemerkung</u> zur Lage.

Wir haben nun noch zu jedem Körper einen algebraischen Abschluß zu konstruieren.

Das benötigt Zorns Lemma.

Das ist eine recht aufwendig herzuleitende mengentheoretische Aussage.

Der Nachweis dieser Aussage kommt in einen Anhang.

Die Aussage selbst kommt in den Haupttext.

Das spiegelt auch wider, daß ich bei Zorns Lemma die Aussage für wichtiger halte als den Beweis. Letzteren wollte ich eben nicht weglassen.