Bsp zu $GL_2(\mathbb{F}_2)$:

Es besteht $GL_2(\mathbb{F}_2) = U(\mathbb{F}_2^{2\times 2})$ aus den invertierbaren Matrizen der Größe 2×2 und Einträgen in $\mathbb{F}_2$. Also:

$$GL_2(\mathbb{F}_2) = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= 1_{GL_2(\mathbb{F}_2)}}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

Es wird z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bsp</u> Es ist $\mathbb{Q}^\times$ eine unendliche Gruppe. Für alle $q \in \mathbb{Q}^\times \setminus \{1\}$ ist dabei $q^z \neq 1$ für $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

<u>Bsp</u> für Zykelschreibweise:

Sei $f : [1,6] \longrightarrow [1,6]$

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 5 \\ 2 &\longmapsto 1 \\ 3 &\longmapsto 3 \\ 4 &\longmapsto 6 \\ 5 &\longmapsto 2 \\ 6 &\longmapsto 4 \end{aligned}$$

weglaßbar

$$\Rightarrow \quad f = (1,5,2)\,(4,6)\,(3) \overset{\text{alternativ}}{=} (4,6)\,(2,1,5)$$

Bsp für Multiplikationen

in Zykelschreibweise:

gemäß Definition S_n: Multiplikation ist Komposition

(1) $\underbrace{(1,3,5)(2,6)}_{f} \circ \underbrace{(4,3,5)}_{g} = ?$

Es bildet $f \circ g$ wie folgt ab:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xmapsto{g} 1 \xmapsto{f} 3 \\ 3 \xmapsto{g} 5 \xmapsto{f} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Zykel } (1,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 \xmapsto{g} 2 \xmapsto{f} 6 \\ 6 \xmapsto{g} 6 \xmapsto{f} 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Zykel } (2,6)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4 \xmapsto{g} 3 \xmapsto{f} 5 \\ 5 \xmapsto{g} 4 \xmapsto{f} 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Zykel } (4,5)$$

$$\Rightarrow (1,3,5)(2,6) \circ (4,3,5)$$

$$= (1,3)(2,6)(4,5)$$

(2) $(4,2,5,1) \circ (1,3,2)(4,5)$

$= (1,3,5,2,4)$

(3) $(1,2,3,4)^0 = \mathrm{id}$

$(1,2,3,4)^1 = (1,2,3,4)$

$(1,2,3,4)^2$

$= (1,2,3,4) \circ (1,2,3,4)$

$= (1,3)(2,4)$

$(1,2,3,4)^3$

$= (1,3)(2,4) \circ (1,2,3,4)$

$= (1,4,3,2)$

$$(1,2,3,4)^4$$

$$= (1,4,3,2)\circ(1,2,3,4) = \mathrm{id}$$

$$(1,2,3,4)^{-1} = (4,3,2,1)$$

$$= (1,4,3,2)$$

(5) $(1,3,6) \circ (4,5) = ?$

keine gemeinsamen Einträge

Dann ist es einfach so:

$$(1,3,6)\circ(4,5)$$

$$= (1,3,6)(4,5)$$

Bsp für Untergruppe:

$$U := \{ \mathrm{id},\ \underbrace{(1,2)(3,4)}_{=:f},\ \underbrace{(1,3)(2,4)}_{=:g},\ \underbrace{(1,4)(2,3)}_{=:h} \}$$

ist eine Untergruppe von S_4:

Wir überprüfen dies direkt nach Definition. Dh. wir prüfen, daß für $x, y \in U$ auch $x \circ y^{-1}$ wieder in U liegt.

Es ist $f^{-1} = f$, $g^{-1} = g$, $h^{-1} = h$.

Somit genügt es zu zeigen:

$$x, y \in U \overset{!}{\Longrightarrow} x \circ y \in U$$

(o)	id	f	g	h
id	id	f	g	h
f	f	id	h	g
g	g	h	id	f
h	h	g	f	id

Resultate alle wieder in $\mathcal{U}$!

Rechnung hier für z.B.:

$$g \circ h = (1,3)(2,4) \circ (1,4)(2,3)$$

$$= (1,2)(3,4) = f$$

$\boxed{\text{Also}}$ ist $\mathcal{U} \leq S_4$.

Der Tafel entnimmt man zudem, daß $\mathcal{U}$ abelsch ist.