Bsp für Bewertungen

(1) $R = \mathbb{Z}$ faktoriell, $K = \mathrm{frac}(R) = \mathbb{Q}$

$$x = -2^1 \cdot 3^{-2} \cdot 5^2 \cdot 7^{-1} = -\frac{50}{63} \in \mathbb{Q}^\times$$

$v_2(x) = 1$

$v_3(x) = -2$

$v_5(x) = 2$

$v_7(x) = -1$

$$x = \underbrace{(-1)}_{u \in U(R)} \cdot 2^{v_2(x)} \cdot 3^{v_3(x)} \cdot 5^{v_5(x)} \cdot 7^{v_7(x)}$$

Es ist $v_{11}(x) = 0$, $v_{13}(x) = 0$, ...

Also ist $11^{v_{11}(x)} = 1$, $13^{v_{13}(x)} = 1$, ...

(2) $R = \mathbb{F}_3[X]$ faktoriell

$K = \mathrm{frac}(R) = \mathbb{F}_3(X)$

$$f(X) = 2 \cdot X^{-3} \cdot (X^2+1)^1 = \frac{2(X^2+1)}{X^3}$$

$$v_X(f(X)) = -3$$

$$v_{X^2+1}(f(X)) = 1$$

$$f(X) = \underbrace{2}_{u \in U(R)} \cdot X^{v_X(f(X))} \cdot (X^2+1)^{v_{X^2+1}(f(X))}$$

Für $p(X)$ irreduzibel und

$p(X)$ nicht assoziiert zu X

und zu X^2+1 ist

$$p(X)^{v_{p(X)}(f(X))} = p(X)^0 = 1$$

Bsp für Formel für ggT

$R = \mathbb{Z}$

$x_1 = 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$

$x_2 = 80 = 2^4 \cdot 3^0 \cdot 5^1$

$\operatorname{ggT}(x_1, x_2)$

$= 2^{\min\{v_2(x_1),\, v_2(x_2)\}}$

$\cdot\, 3^{\min\{v_3(x_1),\, v_3(x_2)\}}$

$\cdot\, 5^{\min\{v_5(x_1),\, v_5(x_2)\}}$

$= 2^{\min\{3,4\}} \cdot 3^{\min\{1,0\}} \cdot 5^{\min\{1,1\}}$

$= 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 40$

Die Faktoren bei den weiteren Primzahlen sind alle gleich 1.

Bsp für Bewertung von Polynom

$$f(X) := \frac{3}{7}X^2 + 6X - \frac{1}{12} \in \mathbb{Q}[X]$$

Es ist

$$v_2(f(X)) = \min\{v_2(\tfrac{3}{7}), v_2(6), v_2(-\tfrac{1}{12})\}$$

$$= \min\{0, 1, -2\} = -2$$

$$v_3(f(X)) = \min\{v_3(\tfrac{3}{7}), v_3(6), v_3(-\tfrac{1}{12})\}$$

$$= \min\{1, 1, -1\}$$

$$= -1$$

$$v_7(f(X)) = \min\{v_7(\tfrac{3}{7}), v_7(6), v_7(-\tfrac{1}{12})\}$$

$$= \min\{-1, 0, 0\}$$

$$= -1$$

<u>Bsp</u> für Begriff primitiv:

$$f(X) = 6X^2 + 12X + 9 \in \mathbb{Z}[X]$$

$$v_3(f(X)) = 1 \implies f(X)$$

ist nicht primitiv

$$\text{ggT}(6, 12, 9) = 3$$

$$\frac{1}{3} f(X) = 2X^2 + 4X + 3$$

ist primitiv:

der ggT seiner Koeffizienten ist 1

Bsp für faktoriellen Integritätsbereich, der kein Hauptidealbereich ist.

(1) $\mathbb{Z}[X]$ faktoriell dank Satz 65, aber kein Hauptidealbereich: siehe Scan 27.04.20 -7.

(2) $\mathbb{Q}[X_1, X_2]$ faktoriell dank Satz 65 (oder Korollar 66), aber kein Hauptidealbereich:

Das Ideal $(X_1, X_2) \subseteq \mathbb{Q}[X_1, X_2]$ ist kein Hauptideal!

Dazu ist zunächst festzuhalten: ...

$\ldots (X_1, X_2)$

$$= \{ X_1 \cdot u(X_1, X_2) + X_2 \cdot v(X_1, X_2) : u(X_1, X_2), v(X_1, X_2) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2] \}$$

$$= \{ w(X_1, X_2) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2] : w \text{ hat konstanten Term } 0 \}$$

Annahme, es ist

$$(X_1, X_2) = (f(X_1, X_2))$$

für ein $f(X_1, X_2) \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]$.

Dann sind X_1 und X_2 Vielfache von $f(X_1, X_2)$.

Die Teiler von X_1 sind von der Form aX_1 oder a, mit $a \in \mathbb{Q}^\times$.

Die Teiler von X_2 sind von der Form bX_2 oder b, mit $b \in \mathbb{Q}^\times$.

Also ist $f(X_1, X_2) \in \mathbb{Q}^\times$.

Also ist $(f(X_1, X_2)) = (1)$.

Aber $1 \notin (X_1, X_2)$, da das konstante Polynom 1 eben nicht konstanten Term 0 hat.

$\lightning$