C. Dietzel, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 20

Lösung 9

Aufgabe 33

Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ normiert. Man entscheide, ob $f(X)$ irreduzibel ist.

(1) $f(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$.

(2) $f(X) = X^5 - 25X^2 + 15X + 5$.

(3) $f(X) = (X + 1)^5 - 2$.

(4) $f(X) = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 6X + 5$.

Lösung zu Aufgabe 33:

(1) Das Polynom $f(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$ ist nicht irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, da wir dort die folgende Zerlegung in Nichteinheiten haben:

$$X^6 + X^4 + X^2 + 1 = (X^4 + 1)(X^2 + 1).$$

(2) Das Polynom $f(X) = X^5 - 25X^2 + 15X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel: $f(X)$ ist normiert und hat ganzzahlige Koeffizienten, die da sind

$$a_0 = 5\ ,\ a_1 = 15\ ,\ a_2 = -25\ ,\ a_3 = a_4 = 0\ ,\ a_5 = 1.$$

Es gilt also $a_i \equiv_5 0$ ($i \in [0, 4]$) und $a_0 \not\equiv_{25} 0$. Nach Lemma 200 (mit $p = 5$) ist $f(X)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(3) Das Polynom $f(X) = (X + 1)^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel: nach Bemerkung 202(2) ist $f(X)$ genau dann irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, wenn es auch $g(X) = f(X - 1) = X^5 - 2$ ist. Das Polynom $g(X)$ ist normiert mit ganzzahligen Koeffizienten, außerdem besitzt es die Koeffizienten

$$b_0 = -2\ ,\ b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0\ ,\ b_5 = 1.$$

Es gilt also $b_i \equiv_2 0$ ($i \in [0, 4]$) und $b_0 \not\equiv_4 0$. Nach Lemma 200 (mit $p = 2$) ist $g(X)$ – und damit auch $f(X)$ – irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(4) Das Polynom $f(X) = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 6X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, wie wir zeigen wollen.

Nach dem binomischen Lehrsatz ist $(X + 1)^4 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$. Wir können also auch schreiben:

$$\begin{aligned} f(X) &= X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 6X + 5 \\ &= (X + 1)^4 + 2X + 4 \\ &= (X + 1)^4 + 2(X + 1) + 2 \\ &= g(X + 1), \end{aligned}$$

wobei $g(X) := X^4 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist. Nach Bemerkung 202(2) können wir anstelle von $f(X)$ das Polynom $g(X)$ auf Irreduzibilität untersuchen; dessen Koeffizienten sind gegeben durch

$$b_0 = 2\ ,\ b_1 = 2\ ,\ b_2 = b_3 = 0\ ,\ b_4 = 1.$$

Es gilt also $b_i \equiv_2 0$ ($i \in [0, 3]$) und $b_0 \not\equiv_2 0$. Nach Lemma 200 ist $g(X)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, also ist auch $f(X)$ irreduzibel.

Aufgabe 34
Sei $\zeta_3 := \exp(2\pi \mathrm{i}/3) \in \mathbb{C}$. Es ist $\zeta_3^3 = 1$.
Sei $\zeta_9 := \exp(2\pi \mathrm{i}/9) \in \mathbb{C}$. Es ist $\zeta_9^3 = \zeta_3$ und $\zeta_9^9 = 1$.
Wir haben die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\zeta_9)|\mathbb{Q}(\zeta_3)|\mathbb{Q}$.

(1) Man zeige durch eine Untersuchung der Nullstellen, daß $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Man folgere, daß $\mu_{\zeta_3,\mathbb{Q}}(X) = X^2 + X + 1$ ist.

(2) Man zeige durch eine Translation, gefolgt von Eisenstein, daß $X^6 + X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Man folgere, daß $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}}(X) = X^6 + X^3 + 1$ ist.

(3) Man bestimme die Grade $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}(\zeta_3)]$.

(4) Man bestimme $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}(\zeta_3)}(X) \in \mathbb{Q}(\zeta_3)[X]$.

Lösung zu Aufgabe 34:

(1) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(X) = X^2+X+1$. Dann ist z auch eine Nullstelle des Polynoms
$$g(X) = (X-1)(X^2+X+1) = X^3 - 1.$$
Die Nullstellen von $g(X)$ sind bekanntlich 1, $\exp(2\pi\imath/3) = \zeta_3$ und $\exp(4\pi\imath/3) = \zeta_3^2$. Da 1 keine Nullstelle von $f(X)$ ist, müssen ζ_3, ζ_3^2 die Nullstellen von $f(X)$ sein. Da $\zeta_3, \zeta_3^2 \notin \mathbb{Q}$ sind, hat $f(X)$ keine Nullstellen in $\mathbb{Q}$ und ist nach Bemerkung 195 irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Alternativ kann man die Nullstellen von $X^2 + X + 1$ auch mit der Mitternachtsformel untersuchen.

Es folgt, dass $\mu_{\zeta_3,\mathbb{Q}}(X) = X^2 + X + 1$ ist.

(2) Wir setzen nun $f(X) = X^6 + X^3 + 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(X) &:= f(X+1) \\ &= (X+1)^6 + (X+1)^3 + 1 \\ &= (X^6 + 6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X + 1) \\ &\quad + (X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + 1 \\ &= X^6 + 6X^5 + 15X^4 + 21X^3 + 18X^2 + 9X + 3. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 202(2) ist $f(X)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ genau dann, wenn auch $g(X)$ es ist. Das Polynom $g(X)$ ist normiert und ganzzahlige Koeffizienten; diese sind

$$b_0 = 3\ ,\ b_1 = 9\ ,\ b_2 = 18\ ,\ b_3 = 21\ ,\ b_4 = 15\ ,\ b_5 = 6\ ,\ b_6 = 1.$$

Man sieht nun, dass $b_i \equiv_3 0$ für $i \in [0,5]$ und $b_0 \not\equiv_9 0$. Nach Lemma 200 (mit $p = 3$) ist $g(X)$ – und damit auch $f(X)$ – irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Da $\zeta_9^9 = 1$ ist, ist ζ_9 eine Nullstelle des Polynoms

$$h(X) = X^9 - 1 = (X^3 - 1)(X^6 + X^3 + 1).$$

Da $\zeta_9^3 - 1 = \zeta_3 - 1 \neq 0$ ist, muss ζ_9 eine Nullstelle des Faktors $X^6 + X^3 + 1 = f(X)$ sein. Da $f(X)$, wie soeben gezeigt, irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist, folgt, dass $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}}(X) = X^6 + X^3 + 1$ ist.

(3) Nach Lemma 182 ist
$$[\mathbb{Q}(\zeta_3):\mathbb{Q}] = \deg(\mu_{\zeta_3,\mathbb{Q}}(X)) = 3$$
und
$$[\mathbb{Q}(\zeta_9):\mathbb{Q}] = \deg(\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}}(X)) = 6.$$
Weiterhin erhalten wir mit Lemma 193, dass
$$\begin{aligned}[\mathbb{Q}(\zeta_9):\mathbb{Q}(\zeta_3)]\cdot[\mathbb{Q}(\zeta_3):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_9):\mathbb{Q}] &\Leftrightarrow [\mathbb{Q}(\zeta_9):\mathbb{Q}(\zeta_3)]\cdot 2 = 6\\ &\Leftrightarrow [\mathbb{Q}(\zeta_9):\mathbb{Q}(\zeta_3)] = 3.\end{aligned}$$

(4) Es ist $\zeta_9^3 = \zeta_3$. Also ist ζ_9 eine Nullstelle von $X^3 - \zeta_3$.
Folglich gilt $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}(\zeta_3)}(X) \mid (X^3 - \zeta_3)$.
Wegen $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}(\zeta_3)] = 3$ (siehe Teil (3)) muss $\deg(\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}(\zeta_3)}(X)) = 3$ sein. Es folgt $\mu_{\zeta_9,\mathbb{Q}(\zeta_3)}(X) = X^3 - \zeta_3$.

Aufgabe 35

(1) Man konstruiere einen Körper $\mathbb{F}_{81}$ mit $|\mathbb{F}_{81}| = 81$, wobei ein Erzeuger γ das Minimalpolynom $\mu_{\gamma,\mathbb{F}_3}(X) = X^4 + X - 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ über $\mathbb{F}_3$ habe.

(2) Man bestimme $\{\, u \in \mathbb{F}_{81} \,:\, \mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(u) = u \,\}$.

(3) Man finde in $\mathbb{F}_{81}$ einen Teilkörper Z isomorph zu $\mathbb{F}_9$.

(4) Man bestimme $\mu_{\gamma,Z}(X) \in Z[X]$. Man finde $g(X) \in Z[X]$ mit $\mu_{\gamma,\mathbb{F}_3}(X) = \mu_{\gamma,Z}(X)\cdot g(X)$.

Lösung zu Aufgabe 35:

(1) Nach Lemma 183 hat man mit $\mathbb{F}_{81} := \mathbb{F}_3[X]/(X^4 + X - 1)$ eine Körpererweiterung $\mathbb{F}_{81}|\mathbb{F}_3$ vom Grad $[\mathbb{F}_{81} : \mathbb{F}_3] = 4$. Damit ist tatsächlich $|\mathbb{F}_{81}| = |\mathbb{F}_3|^4 = 81$.
Außerdem wird $\mathbb{F}_{81}$ über $\mathbb{F}_3$ erzeugt vom Element $\gamma := X + (X^4 + X - 1) \in \mathbb{F}_{81}$, welches das Minimalpolynom $\mu_{\gamma,\mathbb{F}_3}(X) = X^4 + X - 1$ besitzt.
Es ist also $\mathbb{F}_{81} = \mathbb{F}_3(\gamma) = \mathbb{F}_3[\gamma]$.
Zum Rechnen beachten wir $\gamma^4 = 1 - \gamma$ und $3\gamma = 0$.

Der Vollständigkeit halber prüfen wir nach, dass $f(X) := X^4 + X - 1$ tatsächlich irreduzibel in $\mathbb{F}_3[X]$ ist:
Das Polynom $f(X)$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{F}_3$ (dies sieht man durch Einsetzen aller möglichen Werte für X). Sollte $f(X)$ also in nichttrivialer Weise zerfallen, dann nur in quadratische Faktoren, also:
$$\begin{aligned}X^4 + X - 1 &= (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)\\ &= X^4 + (a+c)X^3 + (ac + b + d)X^2 + (ad + bc)X + bd.\end{aligned}$$
Damit $bd = -1$ ist, muss $b = 1, d = -1$ oder $b = -1, d = 1$ gelten. Ohne Einschränkung dürfen wir $b = 1, d = -1$ annehmen. Ein Vergleich des Koeffizienten vor X^2 ergibt dann
$$ac + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow ac = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (c = 0).$$
Vergleicht man die Koeffizienten vor X^3, so ergibt sich $a + c = 0$. Da $a = 0$ oder $c = 0$, ergibt sich $a = 0$ und $b = 0$. Vergleichen der Koeffizienten vor X ergibt schließlich
$$1 = ad + bc = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0,$$
ein *Widerspruch.*

(2) Als $\mathbb{F}_3$-Vektorraum besitzt $\mathbb{F}_{81}$ nach Lemma 182 die Basis $\{1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3\}$. Der Frobenius-Automorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}_{\mathbb{F}_{81}} : \mathbb{F}_{81} &\to \mathbb{F}_{81} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

lässt den Teilkörper $\mathbb{F}_3 \subseteq \mathbb{F}_{81}$ elementweise fest. Somit ist $\mathrm{Fr}_{\mathbb{F}_{81}}$ eine $\mathbb{F}_3$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix wir nun bestimmen wollen:

Zunächst einmal gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}_{\mathbb{F}_{81}}(1) &= 1, \\ \mathrm{Fr}_{\mathbb{F}_{81}}(\gamma) &= \gamma^3. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\mathrm{Fr}_{\mathbb{F}_{81}}(\gamma^2) = \gamma^6 = \gamma^2(1-\gamma) = -\gamma^3 + \gamma^2 \; .$$

Zum Schluss berechnen wir noch

$$\mathrm{Fr}_{\mathbb{F}_{81}}(\gamma^3) = \gamma^9 = \gamma(1-\gamma)^2 = \gamma(1+\gamma+\gamma^2) = \gamma^3 + \gamma^2 + \gamma \; .$$

Bezüglich der Basis $\{1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3\}$ wird $\mathrm{Fr}_{\mathbb{F}_{81}}$ also dargestellt durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demnach wird $\mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}$ durch die Matrix

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Um die Menge aller $x \in \mathbb{F}_{81}$ zu bestimmen, für die $\mathrm{Fr}_{\mathbb{F}_{81}}(x) = x$ gilt, lösen wir also in $\mathbb{F}_3^4$ die Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} &(A^2 - E)v = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} v = 0. \end{aligned}$$

Eine Basis des Lösungsraums ist zum Beispiel gegeben durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren repräsentieren in $\mathbb{F}_{81}$ die Elemente $u_1 = 1$, $u_2 = -\gamma + \gamma^2 + \gamma^3$. Es folgt, dass die Fixpunktmenge von $\mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}$ gegeben ist durch

$$Z := \{u \in \mathbb{F}_{81} : \mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(u) = u\} = {}_{\mathbb{F}_3}\langle 1, -\gamma + \gamma^2 + \gamma^3 \rangle.$$

(3) Es ist Z ein Teilkörper von $\mathbb{F}_{81}$, da $\mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(1) = 1$ und da für $u, v \in Z$ sich $\mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(u - v) = \mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(u) - \mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(v) = u - v$ sowie $\mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(u \cdot v) = \mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(u) \cdot \mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}(v) = u \cdot v$, allein unter Verwendung der Tatsache, dass $\mathrm{Fr}^2_{\mathbb{F}_{81}}$ ein Körpermorphismus ist.

Für das Basiselement $-\gamma + \gamma^2 + \gamma^3 \in Z$ gilt

$$\begin{aligned}(-\gamma + \gamma^2 + \gamma^3)^2 &= \gamma^6 + \gamma^4 + \gamma^2 - 2\gamma^3 - 2\gamma^4 + 2\gamma^5 \\ &= (\gamma^2 - \gamma^3) + (1 - \gamma) + \gamma^2 + \gamma^3 + (1 - \gamma) - (\gamma - \gamma^2) \\ &= -1\ .\end{aligned}$$

Setzen wir $\iota := -\gamma + \gamma^2 + \gamma^3$, so ist $Z = \{a + b\iota : a, b \in \mathbb{F}_3\} \subseteq \mathbb{F}_{81}$.

Ferner ist $\mu_{\iota,\mathbb{F}_3}(X) = X^2 + 1$. Also ist $Z \simeq \mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{F}_9$, vgl. Aufgabe 32.

(4) Es ist $4 = [\mathbb{F}_{81} : \mathbb{F}_3] = [\mathbb{F}_{81} : Z] \cdot [Z : \mathbb{F}_3] = [\mathbb{F}_{81} : Z] \cdot [\mathbb{F}_9 : \mathbb{F}_3] = [\mathbb{F}_{81} : Z] \cdot 2$, und also $[\mathbb{F}_{81} : Z] = 2$.

Ferner ist $\mathbb{F}_{81} = Z(\gamma)$, da ja sogar $\mathbb{F}_{81} = \mathbb{F}_3(\gamma)$ ist.

Hieraus folgt nach Lemma 182, dass $\deg(\mu_{\gamma,Z}(X)) = 2$ sein muss.

Wir machen nun den Ansatz

$$\begin{aligned}\gamma^2 &\overset{!}{=} (a + b\iota)\,\gamma + (c + d\iota) \\ &= a\gamma + b\iota \cdot \gamma + c + d\iota,\end{aligned}$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{F}_3$ sein sollen. Nun ist

$$\begin{aligned}\iota \cdot \gamma &= (-\gamma + \gamma^2 + \gamma^3)\gamma \\ &= -\gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 \\ &= 1 - \gamma - \gamma^2 + \gamma^3.\end{aligned}$$

Setzen wir nun diesen Ausdruck sowie $\iota = -\gamma + \gamma^2 + \gamma^3$ in unseren Ansatz ein, so schreibt sich dieser als

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= a\gamma + b(1 - \gamma - \gamma^2 + \gamma^3) + c + d(-\gamma + \gamma^2 + \gamma^3) \\ &= (b + c) + (a - b - d)\gamma + (-b + d)\gamma^2 + (b + d)\gamma^3.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun

(I) $\quad b + c = 0$

(II) $\quad a - b - d = 0$

(III) $\quad -b + d = 1$

(IV) $\quad b + d = 0.$

Zieht man (III) von (IV) ab, so erhält man $b = 1$. Einsetzen in (I) bzw. (IV) ergibt $c = d = -1$. Setzt man das alles in (II) ein, erhält man schließlich $a = 0$. In unseren Ansatz eingesetzt, ergibt sich:

$$\gamma^2 = \iota\gamma + (-1 - \iota) \Leftrightarrow \gamma^2 - \iota\gamma + (1 + \iota) = 0.$$

Da $\deg(\mu_{\gamma,Z}(X)) = 2$ ist, folgt

$$\mu_{\gamma,Z}(X) \;=\; X^2 - \iota X + (1 + \iota)\ .$$

Eine Polynomdivision mithilfe der Tabelle aus Aufgabe 32 liefert uns

$$X^4 + X - 1 = \big(X^2 - \iota X + (1 + \iota)\big) \cdot \big(X^2 + \iota X + (1 - \iota)\big)\ .$$

D.h. mit $g(X) = X^2 + \iota X + (1 - \iota)$ gilt $\mu_{\gamma,\mathbb{F}_3}(X) = \mu_{\gamma,Z}(X) \cdot g(X)$.

Aufgabe 36

(1) Man bestimme alle Körpermorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nach $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$.
Welche davon schränken zu Automorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein?

(2) Man bestimme alle Körpermorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nach $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$.
Welche davon schränken zu Automorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ein?

Lösung zu Aufgabe 36:

(1) Das Element $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ erfüllt die Gleichung $\sqrt{2}^2 - 2 = 0$. Für einen Körpermorphismus $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{C}$ muss folglich gelten:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(\sqrt{2}^2 - 2) = \varphi(\sqrt{2})^2 - 2,$$

wobei $\varphi(2) = 2$ daraus folgt, dass φ ein Körpermorphismus über $\mathbb{Q}$ ist. Da $\varphi(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$ ist, so muss $\varphi(\sqrt{2}) \in \{\pm\sqrt{2}\}$ sein.

Da $\mu_{\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X) = X^2 - 2$ ist, gibt es nach Lemma 189 in der Tat eindeutige Körpermorphismen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{C}$ mit $\varphi_1(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ bzw. $\varphi_2(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, nämlich:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\to \mathbb{C} \\ f(\sqrt{2}) &\mapsto f(\sqrt{2}) \quad (\text{für } f(X) \in \mathbb{Q}[X]) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) &\to \mathbb{C} \\ f(\sqrt{2}) &\mapsto f(-\sqrt{2}) \quad (\text{für } f(X) \in \mathbb{Q}[X]). \end{aligned}$$

Da jedes $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ eindeutig geschrieben werden kann als $x = a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, hat man mit beliebigen $a, b \in \mathbb{Q}$ auch die folgenden Darstellungen für φ_1, φ_2:

$$\begin{aligned} \varphi_1(a + b\sqrt{2}) &= a + b\sqrt{2} \\ \varphi_2(a + b\sqrt{2}) &= a - b\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Der Körpermorphismus φ_1 schränkt sich also zur Identität auf $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein, was offensichtlich ein Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist.

Weiterhin ist für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ auch $\varphi_2(a+b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, folglich schränkt sich φ_2 zu einem Körpermorphismus $\varphi_2' : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein. Für diesen gilt $\varphi_2'^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}$, woraus folgt, dass es sich auch bei φ_2' um einen Automorphismus handelt.

(2) Wir schreiben $\omega := \sqrt[3]{2}$.

Das Element $\omega \in \mathbb{Q}(\omega)$ erfüllt die Gleichung $\omega^3 - 2 = 0$. Für einen Körpermorphismus $\psi : \mathbb{Q}(\omega) \to \mathbb{C}$ muss folglich gelten:

$$0 = \psi(0) = \psi(\omega^3 - 2) = \psi(\omega)^3 - 2,$$

Da $\psi(\omega)^3 - 2 = 0$ ist, erhalten wir, dass $\psi(\omega) \in \{\omega \cdot \zeta_3^i : i \in [1, 3]\}$ sein muss, wobei $\zeta_3 = \exp(2\pi i/3)$ ist.

Da $\mu_{\omega,\mathbb{Q}}(X) = X^3 - 2$ ist, gibt es, wieder nach Lemma 189, in der Tat für jedes $i \in [1, 3]$ einen eindeutigen Körpermorphismus $\psi_i : \mathbb{Q}(\omega) \to \mathbb{C}$ so, dass $\psi_i(\omega) = \omega \cdot \zeta_3^i$ ist, nämlich:

$$\begin{aligned} \psi_i : \mathbb{Q}(\omega) &\to \mathbb{C} \\ f(\omega) &\mapsto f(\omega \cdot \zeta_3^i). \end{aligned}$$

Schreibt man die Elemente $x \in \mathbb{Q}(\omega)$ als $x = a + b\omega + c\omega^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, so erhalten wir die expliziten Darstellungen:

$$\psi_i(a + b\omega + c\omega^2) = a + b\omega \cdot \zeta_3^i + c\omega^2 \cdot \zeta_3^{2i}$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Es ist $\mathbb{Q}(\omega) \subseteq \mathbb{R}$, für $i \in \{1, 2\}$ ist jedoch $\psi_i(\omega) = \omega\zeta_i \notin \mathbb{R}$. Damit schränken sich ψ_1, ψ_2 nicht zu einem Automorphismus von $\mathbb{Q}(\omega)$ ein. Der Körpermorphismus ψ_3 hingegen schränkt sich zur Identität auf $\mathbb{Q}(\omega)$ ein - also zu einem Automorphismus von $\mathbb{Q}(\omega)$.