C. Dietzel, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 20

Lösung 7

Aufgabe 25

(1) Man bestimme $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{10})$ und $\mathrm{Syl}_5(\mathrm{D}_{10})$.

(2) Man bestimme $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})$ und $\mathrm{Syl}_3(\mathrm{D}_{12})$.

Man bestätige in jedem Fall die Aussagen von Satz 141.(3) – auch dann, als Wiederholung, wenn man sie schon während der Konstruktion verwendet hat.

Lösung zu Aufgabe 25:

(1) Per Definition ist $\mathrm{D}_{10} = \langle a, b\rangle \leqslant \mathrm{S}_5$ mit $a = (1, 2, 3, 4, 5)$ und $b = (2, 5)(3, 4)$.

Weiterhin lässt sich jedes Element $g \in \mathrm{D}_{10}$ eindeutig als $g = a^i b^j$ ($i \in [0, 4]$, $j \in [0, 1]$) schreiben, und es gelten die folgenden Gleichungen:

$$a^5 = b^2 = 1 \quad ; \quad {}^b a = a^{-1}.$$

Wir bestimmen nun $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{10})$: Es ist $10 = 2 \cdot 5$, somit ist jede 2-Sylowgruppe zyklisch der Ordnung 2. Weiterhin ist $m = 5$.

Wir benutzen hier bereits die Sylowsätze: wir kennen eine 2-Sylowgruppe von D_{10}, nämlich $P = \langle b\rangle$. Jede 2-Sylowgruppe Q ist zu P konjugiert, d.h. $Q = {}^g P = \langle {}^g b\rangle$ für ein $g \in \mathrm{D}_{10}$. Schreiben wir $g = a^i b^j$, so haben wir

$${}^g b = {}^{a^i}({}^{b^j} b) = {}^{a^i} b = a^i b a^{-i} = a^i\ {}^b(a^{-i}) b = a^i a^i b = a^{2i} b.$$

Für $i \in [0, 4]$ durchläuft a^{2i} alle Elemente von $\langle a\rangle$, da diese als zyklische Gruppe der Ordnung 5 auch von a^2 erzeugt wird. Folglich sind die Konjugierten von b gerade alle Elemente der Form $a^j b$ ($j \in [0, 4]$). Da diese Elemente paarweise verschieden sind, erzeugt jedes eine andere 2-Sylowgruppe $\langle a^j b\rangle$ (da es in einer zweielementigen Untergruppe genau ein nichttriviales Element gibt).

Folglich ist

$$\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{10}) = \{\langle a^j b\rangle : j \in [0, 4]\}.$$

Wir überprüfen nun die Sylowsätze:

(1) Es gibt eine 2-Sylowgruppe $P \leqslant \mathrm{D}_{10}$, nämlich $P = \langle b\rangle$.

(2) Es operiert G durch Konjugation transitiv auf den 2-Sylowgruppen: für $j \in [0, 4]$ ist $a^j b$ konjugiert zu b vermöge

$$g = \begin{cases} a^{\frac{j}{2}} & j \text{ gerade} \\ a^{\frac{j+5}{2}} & j \text{ ungerade} \end{cases},$$

denn dann ist (vgl. obige Rechnung):

$${}^g b = \begin{cases} a^{2\cdot\frac{j}{2}} b = a^j b & j \text{ gerade} \\ a^{2\cdot\frac{j+5}{2}} b = a^{j+5} b = a^j b & j \text{ ungerade} \end{cases},$$

entsprechend ist in allen Fällen $Q = {}^g P$.

(3) Es ist $|\operatorname{Syl}_2(\mathrm{D}_{10})| = 5 \equiv_2 1$ und weiterhin gilt $5|m$, da $m = 5$ ist.

(4) Jede 2-Untergruppe von D_{10} ist trivial (und damit bereits in einer der 2-Sylowgruppen enthalten) oder selbst eine 2-Sylowgruppe.

Nun bestimmen wir $\operatorname{Syl}_5(\mathrm{D}_{10})$: Es ist $10 = 5 \cdot 2$, und auch hier ergibt sich, dass alle 5-Sylowgruppen zyklisch von der Ordnung 5 sind. Außerdem ist $m = 2$.

Eine 5-Sylowgruppe kennen wir bereits, nämlich $P = \langle a \rangle$. Jede weitere 5-Sylowgruppe Q ist konjugiert zu P vermöge einem Element $g \in \mathrm{D}_{10}$, mit dem $Q = {}^gP$ ist.

Nun haben wir ${}^ba = a^{-1}$, somit ist

$$ {}^bP = \left\langle {}^ba \right\rangle = \left\langle a^{-1} \right\rangle = P. $$

Es folgt, dass ${}^{b^j}P = P$ für alle Werte von j gilt. Andererseits ist für alle i

$$ {}^{a^i}P = {}^{a^i}\langle a \rangle = \left\langle {}^{a^i}a \right\rangle = \langle a \rangle = P, $$

folglich ist für alle $g = a^i b^j \in \mathrm{D}_{10}$

$$ {}^gP = {}^{a^i}({}^{b^j}P) = {}^{a^i}P = P, $$

woraus folgt, dass $P \trianglelefteq \mathrm{D}_{10}$ ist. Wir schließen daraus, dass $\operatorname{Syl}_5(\mathrm{D}_{10}) = \{\langle a \rangle\}$ ist.

Wir überprüfen die Sylowsätze:

(1) Es existiert eine 5-Sylowgruppe, namlich $P = \langle a \rangle$.

(2) Da es nur eine 5-Sylowgruppe gibt, operiert D_{10} trivialerweise transitiv auf $\operatorname{Syl}_5(\mathrm{D}_{10})$.

(3) Weiterhin ist $|\operatorname{Syl}_5(\mathrm{D}_{10})| = 1 \equiv_1 5$ und natürlich gilt $1|m$, wobei $m = 2$.

(4) Jede 5-Untergruppe von D_{10} ist entweder trivial (und damit in $\langle a \rangle$ enthalten) oder ist $\langle a \rangle$ selbst.

(2) Per Definition ist $\mathrm{D}_{12} = \langle a, b \rangle \leqslant \mathrm{S}_6$ mit $a = (1,2,3,4,5,6)$ und $b = (2,6)(3,5)$.

Jedes Element $g \in \mathrm{D}_{12}$ lässt sich eindeutig als $g = a^i b^j$ ($i \in [0,5]$, $j \in [0,1]$) schreiben, außerdem gelten die Gleichungen

$$ a^6 = b^2 = 1 \quad ; \quad {}^ba = a^{-1}. $$

Wir bestimmen nun $\operatorname{Syl}_3(\mathrm{D}_{12})$: wir haben die Faktorisierung $12 = 3 \cdot 4$. In diesem Falle ist $m = 4$.

Die 3-Sylowgruppen von D_{12} sind folglich zyklisch von der Ordnung 3.

Eine solche Untergruppe ist $P = \langle a^2 \rangle$. Alle 3-Sylowgruppen $Q \leqslant \mathrm{D}_{12}$ sind demnach von der Form $Q = {}^gP = \langle {}^g(a^2) \rangle$ für ein $g \in G$.

Wir haben ${}^b(a^2) = ({}^ba)^2 = (a^{-1})^2 = a^{-2}$. Da $\langle a^{-2} \rangle = \langle a^2 \rangle = P$ ist, gilt ${}^bP = P$, woraus wir schließen können, dass ${}^{b^j}P = P$ für alle j ist.

Weiterhin ist auch ${}^{a^i}P = \left\langle {}^{a^i}(a^2) \right\rangle = \langle a^2 \rangle = P$ für alle P.

Schreiben wir also $g = a^i b^j$, so gilt ${}^gP = {}^{a^i}({}^{b^j}P) = {}^{a^i}P = P$. Damit ist $P \trianglelefteq \mathrm{D}_{12}$, und somit ist $\operatorname{Syl}_3(\mathrm{D}_{12}) = \{\langle a^2 \rangle\}$.

Wir überprüfen nun die Sylowsätze:

(1) Es gibt eine 3-Sylowgruppe in D_{12}, nämlich $P = \langle a^2 \rangle$.

(2) Da es nur eine 3-Sylowgruppe gibt, operiert D_{12} trivialerweise transitiv auf $\mathrm{Syl}_3(\mathrm{D}_{12})$.

(3) Weiterhin ist $|\,\mathrm{Syl}_3(\mathrm{D}_{10})| = 1 \equiv_1 3$ und natürlich gilt $1|m$, wobei $m = 4$.

(4) Jede 3-Untergruppe von D_{12} ist entweder trivial (und damit in $\langle a^2 \rangle$ enthalten) oder ist $\langle a^2 \rangle$ selbst.

Nun bestimmen wir $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})$: wir faktorisieren dafür $12 = 2^2 \cdot 3$. Hier ist $m = 3$.

Hier ist eine 2-Untergruppe gegeben durch $P = \langle a^3, b \rangle$. Tatsächlich ist $(a^3)^2 = a^6 = 1$, sowie $b^2 = 1$. Außerdem ist ${}^b(a^3) = a^{-3} = a^3$, somit ist $P = \{(a^3)^i b^j : i, j \in [0,1]\}$.

Für ein Element $g = a^i b^j \in \mathrm{D}_{12}$ ermitteln wir nun ${}^gP = \langle {}^g(a^3), {}^gb \rangle$.

Nun ist ${}^b(a^3) = a^3$ (siehe oben), und damit ist ${}^{b^j}(a^3) = a^3$ für alle j. Außerdem ist ${}^{a^i}(a^3) = a^3$, folglich gilt

$$
{}^{a^ib^j}(a^3) = {}^{a^i}({}^{b^j}(a^3)) = {}^{a^i}(a^3) = a^3
$$

für alle Werte von i und j.

Andererseits ist natürlich ${}^{b^j}b = b$ für alle j, und weiterhin ist

$$
{}^{a^i}b = a^i b a^{-i} = a^i\ {}^b(a^{-i})b = a^i a^i b = a^{2i}b.
$$

Durchläuft i die Werte von 0 bis 5, so stellen wir fest, dass $\{a^{2i} : i \in [0,5]\} = \{1, a^2, a^4\}$ ist.

Damit ist ${}^g\langle a^3, b \rangle = \langle {}^g(a^3), {}^gb \rangle$ immer eine der Gruppen $\langle a^3, a^{2i}b \rangle$ $(i \in [0,2])$.

Wir listen die Elemente dieser Gruppen nun auf:

$$
\begin{aligned}
\langle a^3, b \rangle &= \{1, a^3, b, a^3b\} \\
\langle a^3, a^2b \rangle &= \{1, a^3, a^2b, a^5b\} \\
\langle a^3, a^4b \rangle &= \{1, a^3, a^4b, ab\}
\end{aligned}
$$

Damit wird ersichtlich, dass die Gruppen $\langle a^3, a^{2i}b \rangle$ $(i \in [0,2])$ paarweise verschieden sind. Somit ist

$$
\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12}) = \{\langle a^3, a^{2i}b \rangle : (i \in [0,2])\}.
$$

Wir überprüfen die Sylowsätze:

(1) Es gibt eine 2-Sylowgruppe in D_{12}, nämlich $P = \langle a^3, b \rangle$.

(2) Da für alle i gilt (vgl. die obigen Rechnungen), dass $\langle a^3, a^{2i}b \rangle = \left\langle {}^{a^i}(a^3), {}^{a^i}b \right\rangle = {}^{a^i}P$ ist, operiert D_{12} transitiv auf $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})$.

(3) Es gilt $|\,\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})| = 3 \equiv_2 1$ und es gilt auch $3|m$, da $m = 3$.

(4) Sei $H \leqslant \mathrm{D}_{12}$ eine 2-Untergruppe. Ist H trivial, so ist H selbstverständlich in jeder 2-Sylowgruppe enthalten.

   Ist $|H| = 4$, so ist H selbst eine 2-Sylowgruppe und damit auch trivialerweise in einem Element von $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})$ enthalten.

   Ist nun $|H| = 2$, so enthält H abgesehen von 1 ein nichttriviales Element g der Ordnung 2. Wenn wir zeigen können, dass dieses in einem Element von $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})$ liegt, sind wir fertig. Dafür genügt es zu zeigen, dass jedes Element, das in keiner

2-Sylowgruppe liegt, nicht die Ordnung 2 hat. Ein Blick auf unsere Auflistungen zeigt, dass

$$\mathrm{D}_{12} \setminus \Big(\bigcup \mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})\Big) = \{a, a^2, a^4, a^5\}.$$

Diese Elemente haben aber alle entweder die Ordnung 3 (a^2 und a^4) oder die Ordnung 6 (a und a^5).

Folglich kommt jedes Element der Ordnung 2 bereits in einer 2-Sylowgruppe unter, und damit auch jede zweielementige Untergruppe.

Aufgabe 26

(1) Man konstruiere eine nichtabelsche Gruppe G der Ordnung 21 als Untergruppe von S_7.

(2) Man bestimme $\mathrm{Syl}_3(G)$ und $\mathrm{Syl}_7(G)$.

Man bestätige in beiden Fällen die Aussagen von Satz 141.(3).

(3) Sei H eine Gruppe von Ordnung $|H| = 21$. Man zeige, daß $H \simeq G$ oder $H \simeq \mathrm{C}_7 \times \mathrm{C}_3$ ist.

Lösung zu Aufgabe 26:

(1) Wir wählen $a = (1,2,3,4,5,6,7)$ und $b = (2,3,5)(4,7,6)$. Mit dieser Wahl gelten die Gleichungen

$$a^7 = b^3 = 1 \quad ; \quad {}^b a = a^2,$$

womit sich jedes Element von $G := \langle a, b\rangle$ in der Form $a^i b^j$ ($i \in [0,6]$, $j \in [0,2]$) schreiben lässt. Die Gruppe G hat also maximal $7 \cdot 3 = 21$ Elemente.

Da G die Elemente a, b enthält, welche von der Ordnung 7 bzw. 3 sind, muss $|G| = 21$ sein. Weiterhin ist G nichtabelsch, da ${}^b a = a^2 \neq a$.

(2) Wir haben die Faktorisierung $21 = 7 \cdot 3$.

Daraus lässt sich schließen, dass $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| \equiv_3 1$ ist und $|\,\mathrm{Syl}_3(G)|\,|\,7$ gilt. Folglich ist $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| \in \{1, 7\}$.

Eine 3-Sylowgruppe von P kennen wir bereits, nämlich $P = \langle b\rangle$. Jede weitere 3-Sylowgruppe $Q \leqslant G$ ist konjugiert zu P, d.h. es ist $Q = {}^g P = \langle {}^g b\rangle$ für ein $g \in G$.

Wir schreiben $g = a^i b^j$ ($i \in [0,6]$, $j \in [0,2]$) und rechnen

$${}^g b = {}^{a^i}({}^{b^j} b) = {}^{a^i} b = a^i b a^{-i} = a^i\ {}^b(a^{-i}) b = a^i a^{-2i} b = a^{-i} b.$$

Wenn i die Werte 0 bis 6 durchläuft, so nimmt a^i jeden Wert aus $\langle a\rangle$ an. D.h. die 3-Sylowgruppen von G sind gerade die Gruppen $Q = \langle a^i b\rangle$ mit $i \in [0,6]$.

Da sicher nicht alle Elemente der Form $a^i b$ in der gleichen 3-Sylowgruppe liegen können, muss es mehr als eine geben. Folglich gibt es 7 Stück, und jedes Element der Form $a^i b$ ($i \in [0,6]$) erzeugt eine andere.

Damit ist $\mathrm{Syl}_3(G) = \{\langle a^i b\rangle : i \in [0,6]\}$.

Wir bestätigen: Es ist $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| = 7 \equiv_3 1$, sowie $|\,\mathrm{Syl}_3(G)| = 7$ ein Teiler von $21/3 = 7$.

$\mathrm{Syl}_7(G)$ lässt sich dagegen leichter bestimmen. Wir faktorisieren $21 = 7 \cdot 3$ und erhalten, dass jede 7-Sylowgruppe zyklisch von der Ordnung 7 ist.

Einen Kandidaten kennen wir hierfür bereits, nämlich $P = \langle a\rangle$. Zudem ist $[G : P] = 3$, welches der kleinste Primteiler von 21 ist. Somit gilt $P \trianglelefteq G$ nach Lemma 165, und nach Korollar 142 ist P die einzige 7-Sylowgruppe von G. Damit ist $\mathrm{Syl}_7(G) = \{\langle a\rangle\}$.

Wir bestätigen: Es ist $|\,\mathrm{Syl}_7(G)| = 1 \equiv_7 1$, sowie $|\,\mathrm{Syl}_7(G)| = 1$ ein Teiler von $21/7 = 3$.

Die Eindeutigkeit der 7-Sylowgruppe P kann man natürlich auch auf dem Standardweg zeigen: die Zahl der 7-Sylowgruppen ist ein Teiler von 3 und weiterhin ist $|\operatorname{Syl}_7(G)| \equiv_7 1$, damit kommt nur $|\operatorname{Syl}_7(G)| = 1$ in Frage.

(3) Sei $|H| = 21$. Wir haben $21 = 7 \cdot 3$.

Nach der Argumentation in (2) gibt es genau eine 7-Sylowgruppe $P \leqslant H$, welche damit auch normal in H ist. Da P zyklisch sein muss, können wir $P = \langle a \rangle$ für ein $a \in H$ mit $a^7 = 1$ schreiben.

Außerdem gibt es eine 3-Sylowgruppe $Q \leqslant H$. Da diese auch zyklisch sein muss, schreiben wir $Q = \langle b \rangle$ für ein $b \in H$ mit $b^3 = 1$.

Da P normal ist, ist ${}^b a \in P$. Somit gibt es ein $m \in [0, 6]$ so, dass ${}^b a = a^m$ ist. Da weiterhin $b^3 = 1$ ist, erhalten wir

$$a = {}^1 a = {}^{b^3} a = {}^b({}^b({}^b a)) = a^{m^3},$$

woraus folgt, dass $m^3 \equiv_7 1$ sein muss, d.h. es ist $m \in \{1, 2, 4\}$.

Ist $m = 1$, so gelten in H die Gleichungen

$$a^7 = b^3 = 1 \quad ; \quad {}^b a = a,$$

mithilfe derer sich jedes Element $h \in H$ in der Form $h = a^i b^j$ ($i \in [0, 6]$, $j \in [0, 2]$) darstellen lässt. Diese Darstellung muss eindeutig sein - würde sich ein Element auf zwei verschiedene Weisen darstellen lassen, so würden a, b keine 21 Elemente erzeugen können.

Wir schreiben nun $C_7 = \langle c \rangle$ und $C_3 = \langle d \rangle$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : H &\to C_7 \times C_3 \\ a^i b^j &\mapsto (c^i, d^j) \quad (i, j \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv. Sie ist zudem auch ein Gruppenmorphismus, denn für beliebige $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} f(a^{i_1} b^{j_1} \cdot a^{i_2} b^{j_2}) &= f(a^{i_1} a^{i_2} b^{j_1} b^{j_2}) \\ &= f(a^{i_1+i_2} b^{j_1+j_2}) \\ &= (c^{i_1+i_2}, d^{j_1+j_2}) \\ &= (c^{i_1}, d^{j_1}) \cdot (c^{i_2}, d^{j_2}) \\ &= f(a^{i_1} b^{j_1}) \cdot f(a^{i_2} b^{j_2}). \end{aligned}$$

Damit ist f auch ein Gruppenmorphismus, somit ein Isomorphismus. In diesem Falle ist also $H \simeq C_7 \times C_3$.

Alternativ kann man im Fall $m = 1$ auch so vorgehen: Es ist H abelsch von Ordnung 21. Also ist H isomorph zu $\mathrm{C}_{21} \simeq \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_7$.

Ist $m = 2$, so gelten in H die Gleichungen

$$a^7 = b^3 = 1 \quad ; \quad {}^b a = a^2,$$

mithilfe derer sich jedes Element $h \in H$ in der Form $h = a^i b^j$ ($i \in [0, 6]$, $j \in [0, 2]$) darstellen lässt. Diese Darstellung muss erneut eindeutig sein - würde sich ein Element auf zwei verschiedene Weisen darstellen lassen, so würden a, b keine 21 Elemente erzeugen können.

Allgemein implizieren die Gleichungen in H, dass für alle $i,j \geq 0$ gilt, dass

$$b^j a = {}^{b^j}(a^i)b^j = \overbrace{{}^{b}({}^{b}(\ldots {}^{b}}^{j\times}(a^i)))b^j = a^{2^j \cdot i}\ b^j.$$

Dieselbe Aussage gilt, wie wir schon gesehen haben, auch in $G = \langle c, d\rangle$ für die Erzeuger $c := (1,2,3,4,5,6,7)$ und $d := (2,3,5)(4,7,6)$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : H &\to G \\ a^i b^j &\mapsto c^i d^j \quad (i,j \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ist wieder wohldefiniert und bijektiv. Wohldefiniert deshalb, da $a^{i_1} = a^{i_2} \Leftrightarrow i_1 \equiv_7 i_2 \Leftrightarrow c^{i_1} = c^{i_2}$. In derselben Weise sieht man, dass $b^{j_1} = b^{j_2} \Leftrightarrow d^{j_1} = d^{j_2}$. Da die Abbildung sicherlich auch surjektiv ist, und $|G| = |H| = 21$ ist, ist sie bijektiv.

Auch diese Abbildung ist ein Gruppenmorphismus, denn für beliebige $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} f(a^{i_1}b^{j_1} \cdot a^{i_2}b^{j_2}) &= f(a^{i_1} \cdot {}^{b^{j_1}}(a^{i_2})b^{j_1}b^{j_2}) \\ &= f(a^{i_1}a^{2^{j_1}\cdot i_2}b^{j_1}b^{j_2}) \\ &= f(a^{i_1+2^{j_1}\cdot i_2}b^{j_1+j_2}) \\ &= c^{i_1+2^{j_1}\cdot i_2} \cdot d^{j_1+j_2} \\ &= c^{i_1}c^{2^{j_1}\cdot i_2} \cdot d^{j_1}d^{j_2} \\ &= c^{i_1} \cdot {}^{d^{j_1}}(c^{i_2})d^{j_1}d^{j_2} \\ &= c^{i_1}d^{j_1} \cdot c^{i_2}d^{j_2} \\ &= f(a^{i_1}b^{j_1}) \cdot f(a^{i_2}b^{j_2}). \end{aligned}$$

D.h. f ist in der Tat ein Isomorphismus zwischen G und H.

Zuletzt sei $m = 4$. In diesem Falle gelten in H die Gleichungen

$$a^7 = b^3 = 1 \quad ; \quad {}^{b}a = a^4$$

und auch hier lässt sich jedes Element $h \in H$ eindeutig als $h = a^i b^j$ ($i \in [0,6]$, $j \in [0,2]$) darstellen.

Ähnlich wie zuvor gilt für alle $i,j \geq 0$, dass

$$b^j a^i = a^{4^j \cdot i} b^j.$$

Hinsichtlich G, c und d behalten wir die Notation vom vorigen Abschnitt bei.

Nun ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f : H &\to G \\ a^i b^j &\mapsto c^i d^{2j} \quad (i,j \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv.

Wohldefiniert ist sie deshalb, da $a^{i_1} = a^{i_2} \Leftrightarrow i_1 \equiv_7 i_2 \Leftrightarrow c^{i_1} = c^{i_2}$. Außerdem gilt $b^{j_1} = b^{j_2} \Leftrightarrow j_1 \equiv_3 j_2 \Leftrightarrow d^{2j_1} = d^{2j_2}$. Da d^2 die Untergruppe $\langle d\rangle$ erzeugt, nimmt d^{2j} jeden Wert in dieser Untergruppe an. Also ist f surjektiv. Da $|G| = |H| = 21$ ist, ist f somit bijektiv.

Wir rechnen zuletzt die Gruppenmorphismeneigenschaft nach. Für beliebige $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} f(a^{i_1}b^{j_1} \cdot a^{i_2}b^{j_2}) &= f(a^{i_1} \cdot {}^{b^{j_1}}(a^{i_2})b^{j_1}b^{j_2}) \\ &= f(a^{i_1}a^{4^{j_1}\cdot i_2}b^{j_1}b^{j_2}) \\ &= f(a^{i_1+4^{j_1}\cdot i_2}b^{j_1+j_2}) \\ &= c^{i_1+4^{j_1}\cdot i_2} \cdot d^{2(j_1+j_2)} \\ &= c^{i_1}c^{4^{j_1}\cdot i_2} \cdot d^{2j_1}d^{2j_2} \\ &= c^{i_1} \cdot {}^{d^{2j_1}}(c^{i_2})d^{j_1}d^{j_2} \\ &= c^{i_1}d^{2j_1} \cdot c^{i_2}d^{2j_2} \\ &= f(a^{i_1}b^{j_1}) \cdot f(a^{i_2}b^{j_2}). \end{aligned}$$

Also ist f ein Isomorphismus.

Eine etwas abstraktere Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, soll hier skizziert werden.

Wir setzen $U = \langle(1,2,3,4,5,6,7)\rangle \leqslant \mathrm{A}_7$. Man kann dann zeigen, dass $G = \mathrm{N}_{\mathrm{A}_7}(U)$ ist.

Wie in Aufgabenteil (3) zeigt man nun, dass eine Gruppe H der Ordnung 21 eine eindeutige 7-Sylowgruppe P enthält. Für diese gilt, dass $P \trianglelefteqslant H$. Hinsichtlich der 3-Untergruppen gibt es nun folgende Möglichkeiten:

Es ist $|\operatorname{Syl}_3(H)| = 1$: in diesem Falle gibt es eine eindeutige 3-Sylowgruppe Q, für die $Q \trianglelefteqslant H$ gilt. In diesem Falle sind $P, Q \trianglelefteqslant H$ und es gilt $P \cap Q = 1$. Außerdem muss $PQ = H$ sein, damit ist $H \simeq P \times Q$ nach Bemerkung 145.

Es ist $|\operatorname{Syl}_3(H)| = 7$: in diesem Falle operiert H transitiv auf der 7-elementigen Menge der 3-Sylowgruppen. Numerieren wir diese durch, gibt einen Gruppenmorphismus $\varphi : H \to \mathrm{S}_7$. Die Untergruppe $\varphi(H) \leqslant \mathrm{S}_7$ kann aufgrund der Transitivität nicht von Ordnung 1 oder von Ordnung 3 sein. Somit ist $|\operatorname{Kern}(\varphi)| \in \{1, 3\}$. Die Ordnung 3 kommt nicht in Frage - sonst gäbe es nämlich eine normale, und damit eindeutige 3-Sylowgruppe in H. Also ist φ injektiv.

Durch geeignete Numerierung können wir erreichen, dass $\varphi(P) = \langle(1,2,3,4,5,6,7)\rangle = U$ ist.

Da $\varphi(P) \trianglelefteqslant \varphi(H)$ ist, ist $\varphi(H) \leqslant \mathrm{N}_{\mathrm{S}_7}(U)$. Die Gruppe H besitzt nur Elemente ungerader Ordnung, also ist insbesondere $\varphi(H) \leqslant \mathrm{A}_7$, folglich ist $\varphi(H) \leqslant \mathrm{N}_{\mathrm{A}_7}(U) = G$. Da $|\varphi(H)| = |G| = 21$ gilt, schließen wir, dass $G = \varphi(H) \simeq H$ ist.

Aufgabe 27 Sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$. Man finde $S \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ und $T = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ derart, daß $SAT = D$ ist mit $D = \sum_{i\in[1,k]} x_i \, \mathrm{e}_{i,i}$, wobei $k \geqslant 0$, wobei $x_i \in \mathbb{Z}^\times$ und wobei $(x_1) \supseteq (x_2) \supseteq \ldots \supseteq (x_k)$.

(1) $A = \begin{pmatrix} -14 & 6 \\ -2 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} -4 & 11 & 13 \\ -4 & 10 & 10 \\ -8 & 20 & 20 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 27:

(1) Wir folgen konsequent dem auf Seite 61 angegebenen Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} -14 & 6 \\ -2 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -14 & 6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ -7&1&0 \\ 4&0&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1&1 \\ 0&1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&2&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir

$$S = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&2&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\-7&1&0\\4&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&4&1\\1&1&2 \end{pmatrix}$$

und

$$T = \begin{pmatrix} 1&1\\0&1 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist

$$D = S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&4&1\\1&1&2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -14&6\\-2&2\\8&-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&1\\0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2&0\\0&4\\0&0 \end{pmatrix}.$$

(2) Hier lohnt es sich, vom Algorithmus abzuweichen - die dritte Zeile ist das Doppelte der ersten, weiterhin kann man die Einträge der ersten Zeile durch Abziehen der zweiten wesentlich verkleinern; ab dann verfährt man nach Plan:

$$\begin{pmatrix} -4&11&13\\-4&10&10\\-8&20&20 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1&-1&0\\0&1&0\\0&-2&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0&1&3\\-4&10&10\\0&0&0 \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&3\\10&-4&10\\0&0&0 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1&0&0\\-10&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&3\\0&-4&-20\\0&0&0 \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&-4&-20\\0&0&0 \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&-5\\0&0&1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&-4&0\\0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben dann

$$S = \begin{pmatrix} 1&0&0\\-10&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&-1&0\\0&1&0\\0&-2&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&-1&0\\-10&11&0\\0&-2&1 \end{pmatrix}$$

und

$$T = \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&-5\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&-5\\1&0&-3\\0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$D = S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1&-1&0\\-10&11&0\\0&-2&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4&11&13\\-4&10&10\\-8&20&20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&1&-5\\1&0&-3\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&-4&0\\0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28

Man bestimme alle abelschen Gruppen der Ordnung n bis auf Isomorphie.
Man weise dabei auch nach, daß die aufgelisteten Gruppen paarweise nichtisomorph sind.

(1) $n = 16$.

(2) $n = 36$.

(3) $n = 91$.

(4) $n = 32$.

Lösung zu Aufgabe 28: Wir wissen durch Korollar 158, dass für jede endliche abelsche Gruppe A von der Ordnung n eine Isomorphie

$$A \simeq \mathbb{Z}/(x_1) \times \ldots \times \mathbb{Z}/(x_k)$$

besteht, wobei $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ derart sind, dass $(x_1) \supseteq (x_2) \supseteq \ldots \supseteq (x_k)$ gilt, sowie $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = n$. Da $\mathbb{Z}/(1)$ eine triviale Gruppe ist, können wir in einer solchen Darstellung davon ausgehen, dass sogar alle $x_i \geq 2$ $(1 \leq i \leq k)$ sind.
Mit dem Bemerkung 159 (auch als Chinesischer Restsatz bekannt) werden wir die Faktoren $\mathbb{Z}/(x_i)$ $(1 \leq i \leq k)$ dann weiter aufspalten.

(1) $n = 16$: Wir faktorisieren und notieren für jede Faktorisierung die entstehende abelsche Gruppe. Hier werden wir den chinesischen Restsatz nicht anwenden können, da alle entstehenden Faktoren Zweierpotenzen sind und damit nicht in teilerfremde Faktoren zerlegt werden können.

$$\begin{aligned}
16 \rightsquigarrow \quad & \mathbb{Z}/(16) \\
& = C_{16} \\
8 \cdot 2 \rightsquigarrow \quad & \mathbb{Z}/(8) \times \mathbb{Z}/(2) \\
& = C_8 \times C_2 \\
4^2 \rightsquigarrow \quad & (\mathbb{Z}/(4))^2 \\
& = C_4^2 \\
4 \cdot 2^2 \rightsquigarrow \quad & \mathbb{Z}/(4) \times (\mathbb{Z}/(2))^2 \\
& = C_4 \times C_2^2 \\
2^4 \rightsquigarrow \quad & (\mathbb{Z}/(2))^4 \\
& = C_2^4.
\end{aligned}$$

Die entstehenden Gruppen $C_{16}, C_8 \times C_2, C_4^2, C_4 \times C_2^2, C_2^4$ sind paarweise nichtisomorph, wie man z.B. folgendermaßen erkennt:

In einer zyklischen Gruppe C_{2n} ($n \in \mathbb{N}$) hat die Gleichung $x^2 = 1$ genau 2 Lösungen mit $x \in C_{2n}$. Ist also $G = C_{2n_1} \times \ldots C_{2n_k}$, so hat die Gleichung $x^2 = 1$ genau 2^k Lösungen mit $x \in G$. Die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung ist für isomorphe Gruppen identisch.

Die Gleichung $x^2 = 1$ hat folglich jeweils die folgende Anzahl von Lösungen:

A	Lösungen von $x^2 = 1$
C_{16}	2
$C_8 \times C_2$	4
C_4^2	4
$C_4 \times C_2^2$	8
C_2^4	16.

Wir müssen also lediglich noch $C_8 \times C_2$ und C_4^2 auseinanderhalten: hierfür reicht die Feststellung, dass $C_8 \times C_2$ ein Element der Ordnung 8 enthält, C_4^2 dagegen nicht.

(2) $n = 36$: Hier werden wir auf die entstehenden Gruppen zusätzlich den Chinesischen Restsatz anwenden:

$$\begin{aligned}
36 \rightsquigarrow \quad & \mathbb{Z}/(36) \\
& \simeq \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(4) \\
& = C_9 \times C_4 \\
18 \cdot 2 \rightsquigarrow \quad & \mathbb{Z}/(18) \times \mathbb{Z}/(2) \\
& \simeq \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2) \\
& = \mathbb{Z}/(9) \times (\mathbb{Z}/(2))^2 \\
& = C_9 \times C_2^2 \\
12 \cdot 3 \rightsquigarrow \quad & \mathbb{Z}/(12) \times \mathbb{Z}/(3) \\
& \simeq \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3) \\
& = \mathbb{Z}/(4) \times (\mathbb{Z}/(3))^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_4 \times C_3^2 \\
6^2 \rightsquigarrow\ & (\mathbb{Z}/(6))^2 \\
&\simeq (\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(2))^2 \\
&\simeq (\mathbb{Z}/(3))^2 \times (\mathbb{Z}/(2))^2 \\
&= C_3^2 \times C_2^2.
\end{aligned}
$$

Die entstehenden Gruppen, $C_9 \times C_4$, $C_9 \times C_2^2$, $C_3^2 \times C_4$, $C_3^2 \times C_2^2$ sind paarweise nichtisomorph:

Die Gruppen $C_9 \times C_4$ und $C_9 \times C_2^2$ enthalten Elemente der Ordnung 9, $C_4 \times C_3^2$ und $C_2^2 \times C_3^2$ dagegen nicht.

Die Gruppe $C_9 \times C_4$ enthält im Gegensatz zu $C_9 \times C_2^2$ Elemente der Ordnung 4.

Weiterhin enthält auch $C_3^2 \times C_4$ im Gegensatz zu $C_3^2 \times C_2^2$ Elemente der Ordnung 4.

Damit sind alle diese Gruppen paarweise nichtisomorph.

(3) $n = 91$: hier erfüllt nur die triviale Faktorisierung die obigen Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
91 \rightsquigarrow\ & \mathbb{Z}/(91) \\
&\simeq \mathbb{Z}/(13) \times \mathbb{Z}/(7) \\
&= C_{13} \times C_7.
\end{aligned}
$$

Die Überprüfung auf paarweise Nichtisomorphie entfällt hier.

(4) $n = 32$:

$$
\begin{aligned}
32 \rightsquigarrow\ & \mathbb{Z}/(32) \\
&= C_{32} \\
16 \cdot 2 \rightsquigarrow\ & \mathbb{Z}/(16) \times \mathbb{Z}/(2) \\
&= C_{16} \times C_2 \\
8 \cdot 4 \rightsquigarrow\ & \mathbb{Z}/(8) \times \mathbb{Z}/(4) \\
&= C_8 \times C_4 \\
8 \cdot 2^2 \rightsquigarrow\ & \mathbb{Z}/(8) \times (\mathbb{Z}/(2))^2 \\
&= C_8 \times C_2^2 \\
4^2 \cdot 2 \rightsquigarrow\ & (\mathbb{Z}/(4))^2 \times \mathbb{Z}/(2) \\
&= C_4^2 \times C_2 \\
4 \cdot 2^3 \rightsquigarrow\ & \mathbb{Z}/(4) \times (\mathbb{Z}/(2))^3 \\
&= C_4 \times C_2^3 \\
2^5 \rightsquigarrow\ & (\mathbb{Z}/(2))^5 \\
&= C_2^5.
\end{aligned}
$$

Die gefundenen Gruppen C_{32}, $C_{16} \times C_2$, $C_8 \times C_4$, $C_8 \times C_2^2$, $C_4^2 \times C_2$, $C_4 \times C_2^3$, C_2^5 sind paarweise nichtisomorph:

Wir unterscheiden die Gruppen wieder wie in Teilaufgabe (1), indem wir zunächst die Anzahl der Lösungen von $x^2 = 1$ zählen:

A	Lösungen von $x^2 = 1$
C_{32}	2
$C_{16} \times C_2$	4
$C_8 \times C_4$	4
$C_8 \times C_2^2$	8
$C_4^2 \times C_2$	8
$C_4 \times C_2^3$	16
C_2^5	32

Die Gruppe $C_{16} \times C_2$ enthält weiterhin ein Element der Ordnung 16, $C_8 \times C_4$ hingegen nicht.

Außerdem enthält $C_8 \times C_2^2$ ein Element der Ordnung 8, $C_4^2 \times C_2$ allerdings nicht.

Damit sind die gefundenen Gruppen in der Tat paarweise nichtisomorph.