C. Dietzel, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 20

Lösung 6

Aufgabe 21
Sei p prim. Man bestimme die Menge $\operatorname{Syl}_p(\mathrm{S}_5)$.
Man bestätige dafür die Aussagen von Satz 141.(3).

(1) $p = 5$.

(2) $p = 3$.

(3) $p = 2$.

Lösung zu Aufgabe 21:

Wir werden jeweils versuchen, die Liste der p-Sylowgruppen möglichst herzuleiten.

Natürlich darf man sie auch auf experimentellem Wege ermitteln.

Es ist $|\mathrm{S}_5| = 5! = 120$.

(1) Wir faktorisieren $120 = 5^1 \cdot 24$.

Jede 5-Sylowgruppe $P \leqslant \mathrm{S}_5$ hat also die Ordnung 5 und ist somit zyklisch. Nach dem Satz von Lagrange gilt für jedes $g \in P \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$, dass $\langle g \rangle = P$ ist, insbesondere hat g die Ordnung 5.

Jedes $g \in \mathrm{S}_5$ der Ordnung 5 ist von der Form $g = (a, b, c, d, e)$. Folglich hat jede 5-Sylowgruppe die Form $\langle (a, b, c, d, e) \rangle$.

Nach Ersetzen von g durch eine Potenz von g mit Exponent in $[1, 4]$, dürfen wir $g = (1, 2, c, d, e)$ annehmen.

Es enthält $P = \langle g \rangle$ dann keinen weiteren Zykel der Länge 5, der die aufeinanderfolgenden Einträge 1 und 2 hat.

Wir schließen daraus, dass

$$\operatorname{Syl}_5(\mathrm{S}_5) = \{\langle (1, 2, c, d, e) \rangle \leqslant \mathrm{S}_5 : \{c, d, e\} = \{3, 4, 5\}\}.$$

Da es genau $3! = 6$ Möglichkeiten gibt, c, d, e mit den Werten $3, 4, 5$ zu belegen, haben wir gezeigt, dass $|\operatorname{Syl}_5(\mathrm{S}_5)| = 6$ ist.

In der Tat gilt $6 \equiv_5 1$ und $6 | 24$, wie durch Satz 141.(3) vorausgesagt.

(2) Es ist $120 = 3^1 \cdot 40$.

Jede 3-Sylowgruppe $P \leqslant \mathrm{S}_5$ hat also die Ordnung 3 und ist somit zyklisch. Nach dem Satz von Lagrange gilt für jedes nichttriviale $g \in P \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$, dass $\langle g \rangle = P$, insbesondere hat g die Ordnung 3.

Jedes $g \in \mathrm{S}_5$ der Ordnung 3 ist von der Form $g = (a, b, c)$. Demnach hat jede 3-Sylowgruppe von S_5 die Gestalt $P = \langle (a, b, c) \rangle$.

Wir dürfen davon ausgehen, dass in dieser Darstellung $a < b$ und $a < c$ ist. Weiterhin ist $P = \{\mathrm{id}, (a, b, c), (a, c, b)\}$, woraus ersichtlich wird, dass P genau einen 3-Zykel (a, x, y) enthält, in dem $a < x < y$ ist. Dieser erzeugt dann auch P.

Wir haben also gezeigt, dass

$$\mathrm{Syl}_3(\mathrm{S}_5) = \{\langle (a,b,c)\rangle \ : \ (a < b < c) \wedge (a,b,c \in \{1,2,3,4,5\})\}.$$

Es gibt also $\binom{5}{3} = 10$ solche Untergruppen. Also ist $|\,\mathrm{Syl}_3(\mathrm{S}_5)| = 10$.

In der Tat gilt $10 \equiv_3 1$ und $10|40$, im Einklang mit Satz 141.(3).

(3) Wir zerlegen $120 = 2^3 \cdot 15$.

Wir haben in Aufgabe 12.(4) die Untergruppe $U = \langle (1,2,3,4),(1,3)\rangle \leqslant \mathrm{S}_4$ ausfindig gemacht. Vermöge der kanonischen Einbettung $\mathrm{S}_4 \hookrightarrow \mathrm{S}_5$ ist dies auch eine Untergruppe von S_5. Es hat U bereits die Ordnung 2^3, d.h. es handelt sich um eine 2-Sylowgruppe.

Jede 2-Sylowgruppe in S_5 ist demnach konjugiert zu U, d.h. von der Form

$$P \ = \ \langle (a,b,c,d),(a,c)\rangle \ .$$

Insbesondere ist jede solche Gruppe bereits in einer Untergruppe $\mathrm{S}_X \leqslant \mathrm{S}_5$ für eine Untermenge $X = \{a,b,c,d\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ enthalten.

Wir behaupten, dass die 2-Sylowgruppe P bereits dadurch eindeutig bestimmt ist, dass sie (a,b,c,d) enthält. Sei also $Q \leqslant \mathrm{S}_5$ eine 2-Sylowgruppe mit $(a,b,c,d) \in Q$. Wir wissen damit bereits, dass $Q \leqslant \mathrm{S}_X$ ist, wobei $X = \{a,b,c,d\}$.

Da $H := \langle (a,b,c,d)\rangle = 4$ ist und $|Q| = 8$ ist, ist $[Q:H] = 2$. Nach Bemerkung 94 ist $H \trianglelefteq Q$. Folglich ist $Q \leqslant \mathrm{N}_{\mathrm{S}_X}(H)$. Aus Beispiel 126.(4) wissen wir aber , dass $\mathrm{N}_{\mathrm{S}_X}(H) = \langle (a,b,c,d),(a,c)\rangle = P$ ist. Es folgt $Q = P$.

Weiterhin enthält (siehe Lösung von Aufgabe 12.(4)) P genau zwei 4-Zykel, nämlich (a,b,c,d) und sein Inverses, (a,d,c,b). Wir können also insbesondere genau einen 4-Zykel (a',b',c',d') in P finden, für den $a' < b',c',d'$ sowie $b' < d'$ ist.

Zusammenfassend gilt also:

$$\mathrm{Syl}_2(\mathrm{S}_5) = \{\langle (a,b,c,d),(a,c)\rangle \ : \ (a < b,c,d) \wedge (b < d) \wedge (a,b,c,d \in \{1,2,3,4,5\})\}$$

Es gibt $\binom{5}{4} = 5$ Möglichkeiten, die Teilmenge $\{a,b,c,d\}$ zu wählen. Dadurch ist bereits a in dieser Darstellung eindeutig definiert. Wählt man nun eine Belegung für c (3 Möglichkeiten), so sind b,d durch die Bedingung $b < d$ festgelegt. Es gibt also $5 \cdot 3 = 15$ solche Möglichkeiten. Damit ergibt sich $|\,\mathrm{Syl}_2(\mathrm{S}_5)| = 15$.

In der Tat ist $15 \equiv_2 1$ und $15|120$, im Einklang mit Satz 141.(3).

Aufgabe 22

(1) Sei G eine Gruppe. Sei X eine G-Menge. Sei $x \in X$. Sei $g \in G$.

Man zeige $\mathrm{Stab}_G(g \cdot x) = {}^g\mathrm{Stab}_G(x)$.

(2) Sei G eine Gruppe. Sei $x \in G$. Sei $U \leqslant G$. Sei $g \in G$.

Man zeige $\mathrm{C}_G({}^g x) = {}^g\mathrm{C}_G(x)$ und $\mathrm{N}_G({}^g U) = {}^g\mathrm{N}_G(U)$

(3) Sei G eine Gruppe. Sei $U \leqslant G$. Man zeige $U \trianglelefteq \mathrm{N}_G(U)$.

(4) Man folgere das Lemma 138 von Cauchy aus dem Satz 141 von Sylow.

Lösung zu Aufgabe 22:

(1) Sei $h \in \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)$, also $h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x$ bzw. $(hg) \cdot x = g \cdot x$. Dann gilt

$$(g^{-1}hg) \cdot x = g^{-1} \cdot ((hg) \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x,$$

folglich ist $h' := g^{-1}hg \in \mathrm{Stab}_G(x)$. Damit ist $h = {}^g h' \in {}^g\mathrm{Stab}_G(x)$.

Ist andererseits $h \in {}^g\mathrm{Stab}_G(x)$, d.h. $h = {}^g h'$ mit $h' \in \mathrm{Stab}_G(x)$, dann ist

$$h \cdot (g \cdot x) = {}^g h' \cdot (g \cdot x) = ({}^g h' g) \cdot x = (gh'g^{-1}g) \cdot x = (gh') \cdot x = g \cdot (h' \cdot x) = g \cdot x,$$

folglich ist $h \in \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)$.

(2) Wenn G auf G vermöge $g \bullet x = {}^g x$ operiert, so ist $\mathrm{Stab}_G(x) = \mathrm{C}_G(x)$ (Beispiel 126(1)). Nach Teil (1) der Aufgabe ist also $\mathrm{Stab}_G(g \bullet x) = {}^g\mathrm{Stab}_G(x)$ bzw. $\mathrm{C}_G({}^g x) = {}^g\mathrm{C}_G(x)$.

Wenn G auf $\mathcal{U}(G)$ vermöge $g \bullet U = {}^g U$ operiert, so ist $\mathrm{Stab}_G(U) = \mathrm{N}_G(U)$ (Beispiel 126.(3)). Teil (1) der Aufgabe besagt nun, dass $\mathrm{N}_G({}^g U) = {}^g\mathrm{N}_G(U)$.

(3) Ist $U \leqslant G$ und $g \in U$, so ist $x \mapsto {}^g x$ ein Automorphismus von U, somit ist ${}^g U = U$ bzw. $g \in \mathrm{N}_G(U)$. Dies beweist $U \leqslant \mathrm{N}_G(U)$.

Für alle $g \in \mathrm{N}_G(U)$ ist ${}^g U = U$, nach Definition von $\mathrm{N}_G(U)$. Also ist $U \trianglelefteqslant \mathrm{N}_G(U)$.

(4) Ist $|G| \equiv_p 0$, so ist in der Faktorisierung $|G| = p^a \cdot m$ mit $m \not\equiv_p 0$ der Exponent $a > 0$. Somit ist eine p-Sylowgruppe P wegen $|P| = p^a > 1$ nichttrivial.

Wähle irgendein $h \in P \setminus \{1\}$. Dann ist die Ordnung von h ein Teiler von p^a (Korollar 88), aber nicht 1, da $h \neq 1$ ist, d.h. die Ordnung von h ist von der Form p^b mit $b > 0$.

Damit ist $h^{p^{b-1}} \neq 1$ (sonst wäre die Ordnung von h kleiner als p^b). Andererseits ist $(h^{p^{b-1}})^p = h^{p^b} = 1$. Also ist $h^{p^{b-1}}$ ein Element der Ordnung p.

Aufgabe 23

Sei p prim. Sei $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. Sei $X := \mathrm{P}^1(\mathbb{F}_p)$ die Menge der Ursprungsgeraden in $\mathbb{F}_p^{2\times 1}$.

(1) Man konstruiere eine nichttriviale Operation von G auf X.

Der zugehörige Gruppenmorphismus heiße $\varphi : G \to \mathrm{S}_X$.

(2) Man zeige die Gleichheiten $\mathrm{Z}(G) = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \,:\, a \in \mathbb{F}_p\,,\ a^2 = 1 \} = \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(3) Für welche Primzahlen p ist der induzierte Gruppenmorphismus

$$\bar{\varphi} \;:\; \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p) := G/\mathrm{Z}(G) \;\;\to\;\; \mathrm{S}_X$$

ein Isomorphismus?

Lösung zu Aufgabe 23:

(1) Ist $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{F}_p^{2\times 1} &\to \mathbb{F}_p^{2\times 1} \\ v &\mapsto Av \end{aligned}$$

ein Automorphismus des $\mathbb{F}_p$-Vektorraums $\mathbb{F}_p^2$. Insbesondere ist das Bild eines 1-dimensionalen $\mathbb{F}_p$-Unterraums unter f_A erneut ein 1-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Unterraum. Das gibt die Abbildung

$$\begin{aligned} (\cdot) : \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p) \times \mathrm{P}^1(\mathbb{F}_p) &\to \mathrm{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ (A, U) &\mapsto A \cdot U := \{Av : v \in U\}\ . \end{aligned}$$

Wir haben in der Tat eine Gruppenoperation konstruiert: für beliebige $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, $U \in \mathrm{P}^1(\mathbb{F}_p)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_2 \cdot U &= \{\mathrm{E}_2 v : v \in U\} \\ &= \{v : v \in U\} = U \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot U) &= A \cdot \{Bv : v \in U\} \\ &= \{A(Bv) : v \in U\} \\ &= \{(AB)v : v \in U\} \\ &= (AB) \cdot U. \end{aligned}$$

Sie ist weiterhin auch nichttrivial, denn es ist stets $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(2) Wir beginnen damit, die Gleichheit $\mathrm{Z}(G) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{F}_p, a^2 = 1\} =: H$ zu beweisen.

Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{Z}(G) \subseteq H$ ist:

Ist $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Z}(G)$, so kommutiert A auch mit der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der linksoberen Einträge ergibt, dass $c = 0$ ist. Die rechtsoberen Einträge sagen uns weiterhin, dass $a + b = b + d$ ist, woraus $a = d$ folgt. A hat also die Form $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. Da A auch mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ kommutieren muss, ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & a+b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der linksoberen (oder rechtsunteren) Einträge ergibt $b = 0$. Damit ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. Da $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ ist, muss zudem $\det(A) = 1$ ist. Da $\det(A) = a^2$ ist, folgt, dass $A \in H$ ist.

Wir zeigen nun, dass $H \subseteq \mathrm{Z}(G)$ ist:

Ist $A := \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \in H$ $(a \in \mathbb{F}_p)$, so gilt für alle $B := \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, dass

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} \\ ab_{21} & ab_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = BA,$$

also ist $A \in \mathrm{Z}(G)$.

Wir wenden uns nun der Gleichheit $H = \mathrm{Kern}(\varphi)$ zu:

Auch hier zeigen wir zunächst die Inklusion $H \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$:

Ist $A := a\mathrm{E}_2 \in H$, so gilt für alle $U := \langle v \rangle \in \mathrm{P}^1(\mathbb{F}_p)$, dass

$$A \cdot U = a\mathrm{E}_2 \cdot \langle v \rangle = \langle av \rangle = \langle v \rangle \,,$$

somit fixiert A alle Elemente in $\mathrm{P}^1(\mathbb{F}_p)$ und liegt damit in $\mathrm{Kern}(\varphi)$.

Schließlich zeigen wir noch die Inklusion $\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq H$:

Sei also $A := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, dann fixiert A insbesondere die Unterräume $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle, \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle, \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Die ersten zwei Bedingungen ergeben

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \Rightarrow c = 0, \\ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

Also ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$. Die letzte Bedingung ergibt nun:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \Rightarrow a = d.$$

D.h. $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. Wir haben bereits gesehen, dass wenn ein solches A in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ liegt, $A \in H$ ist.

(3) Wir wollen zunächst $|\,\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)|$ ermitteln:

Wir haben in Aufgabe 11 ermittelt, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) = (p^2 - 1)(p^2 - p)$.

Außerdem haben wir vermöge des surjektiven Gruppenmorphismus $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p^\times$ die Isomorphie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)/G \cong \mathbb{F}_p^\times$, also ist

$$|G| = \frac{|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)|}{|\mathbb{F}_p^\times|} = \frac{(p^2-1)(p^2-p)}{p-1} = (p^2-1)p.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

Fall $p = 2$:

Es gibt nur ein $a \in \mathbb{F}_2$ mit $a^2 = 1$, nämlich $a = 1$. Folglich ist $|\mathrm{Z}(G)| = 1$. In diesem Falle ist

$$|\,\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)| = \frac{|G|}{|\mathrm{Z}(G)|} = \frac{3 \cdot 2}{1} = 6.$$

Fall $p > 2$:

Ist $p > 2$, so gibt es genau zwei Elemente $a \in \mathbb{F}_p$ mit $a^2 = 1$, nämlich $a = 1$ und $a = -1$ (da $\mathbb{F}_p$ ein Körper ist, kann die Gleichung $a^2 - 1 = 0$ maximal zwei Lösungen besitzen). Damit ist $|\mathrm{Z}(G)| = 2$, und

$$|\,\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)| = \frac{|G|}{|\mathrm{Z}(G)|} = \frac{(p^2-1)p}{2} = \frac{(p+1)p(p-1)}{2}.$$

Nun bestimmen wir $|X|$: da jeder Vektor $v \in \mathbb{F}_p^2 \setminus \{0\}$ auf genau einer Ursprungsgerade liegt und jede Ursprungsgerade genau $p-1$ Vektoren aus $\mathbb{F}_p^2 \setminus \{0\}$ enthält, ist

$$|X| = \frac{|\mathbb{F}_p^2 \setminus \{0\}|}{p-1} = \frac{p^2-1}{p-1} = p+1$$

Somit ist $|\mathrm{S}_X| = |X|! = (p+1)!$.

Der Homomorphiesatz (Satz 107) sagt uns nun, dass der kanonische Gruppenmorphismus $\overline{\varphi} : G/\ker(\varphi) \to \mathrm{S}_X$ sich zu einem Isomorphismus $G/\ker(\varphi) \xrightarrow{\sim} \varphi(G)$ einschränkt, inbesondere ist $\overline{\varphi}$ injektiv. Folglich ist $\overline{\varphi}$ genau dann bijektiv, wenn $|\operatorname{PSL}_2(\mathbb{F}_p)| = |\mathrm{S}_X|$.

Ist $p = 2$, so ist $|\operatorname{PSL}_2(\mathbb{F}_p)| = 6$. Und $|\mathrm{S}_X| = (2+1)! = 6$. Somit ist $\overline{\varphi}$ für $p = 2$ ein Isomorphismus.

Zusammengefaßt ist diesenfalls also

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \;=\; \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \;\simeq\; \mathrm{S}_X \;\simeq\; \mathrm{S}_3\,.$$

Ist $p > 2$, so schätzen wir ab:

$$|\operatorname{PSL}_2(\mathbb{F}_p)| = \frac{(p+1)p(p-1)}{2} < (p+1)p(p-1) \leq (p+1)! = |\mathrm{S}_X|.$$

Für $p > 2$ kann $\overline{\varphi}$ also nie ein Isomorphismus sein.

Aber immerhin ist diesenfalls $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ via $\overline{\varphi}$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{S}_X \simeq \mathrm{S}_{p+1}$.

Aufgabe 24 Sei $n \geqslant 1$. Sei G eine endliche Gruppe von Ordnung n. Sei p prim.
Sei $P \leqslant G$ eine p-Sylowgruppe. Sei $P \ntrianglelefteq G$ bekannt.
Man bestimme $|\operatorname{Syl}_p(G)|$.

(1) $n = 6$, $p = 2$.

(2) $n = 21$, $p = 3$.

(3) $n = 80$, $p = 5$.

(4) $n = 42$, $p = 3$.

Lösung zu Aufgabe 24:
Wir werden stets so argumentieren: Wir zerlegen $n = p^a \cdot m$, wobei $p \nmid m$. Aus Satz 141.(3) wissen wir, dass $|\operatorname{Syl}_p(G)|$ ein Teiler von m ist und $|\operatorname{Syl}_p(G)| \equiv_p 1$ gilt. Da die gegebene Sylow-Untergruppe nicht normal ist, ist zudem $|\operatorname{Syl}_p(G)| > 1$ nach Korollar 142.

(1) Wir zerlegen $6 = 2^1 \cdot 3$. Die Teiler von $m = 3$ sind 1 und 3.

Es ist $3 \equiv_2 1$ und $3 > 1$. Es ist 3 der einzige Teiler mit dieser Eigenschaft. Also ist $|\operatorname{Syl}_p(G)| = 3$.

(2) Wir zerlegen $21 = 3^1 \cdot 7$. Die Teiler von $m = 7$ sind 1 und 7.

Es ist $7 \equiv_3 1$ und $7 > 1$. Es ist 7 der einzige Teiler mit dieser Eigenschaft. Also ist $|\operatorname{Syl}_p(G)| = 7$.

(3) Wir zerlegen $80 = 5^1 \cdot 16$. Die Teiler von $m = 16$ sind $1, 2, 4, 8, 16$.

Es ist $16 \equiv_5 1$ und $16 > 1$. Es ist 16 der einzige Teiler mit dieser Eigenschaft. Also ist $|\operatorname{Syl}_p(G)| = 16$.

(4) Wir zerlegen $42 = 3^1 \cdot 14$. Die Teiler von $m = 14$ sind $1, 2, 7, 14$.

Es ist $7 \equiv_3 1$ und $7 > 1$. Es ist 7 der einzige Teiler mit dieser Eigenschaft. Also ist $|\operatorname{Syl}_p(G)| = 7$.