ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 7 N.1 (1982)

CATÉGORIES DE PICARD RESTREINTES

HOÀNG XUÂN SÍNH
Ecole Supérieure de Pédagogie de Hanoi

On se propose dans cet article de représenter toute catégorie de Picard restreinte par un complexe de chaines et en déduire que la classification des catégories de Picard preépinglées de type (M, N) qui sont restreintes est triviale.

1. CATÉGORIES DE PICARD RESTREINTES

DEFINITION 1.1. Une catégorie de Picard est une Gr-catégorie munie d'une contrainte de commutativité compatible avec sa contrainte d'associativité. Une catégorie de Picard P est dite *restreinte* si sa contrainte de commutativité d vérifie

$$c_{x,x} = \text{identité pour tout } x \in \text{ob } P \quad [1]$$

2. COHOMLOGIE DE GROUPES ABÉLIENS LIBRES

2.1. Soit π un groupe et A un π-module. Considérons la B-re solution

$$B(Z(\pi)) \ [3]$$

$$\to B_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \to \ldots \to B_1 \to B_0 \to 0$$

où B_n est le π-module libre de générateurs $[x_1 | \ldots | x_n]$ avec $x_1 \neq 1 \ldots, x_n \neq 1$ appartenant à π et les homomorphismes de π-module ∂ sont définis pour $n > 0$ par

$$\partial[x_1 | \ldots | x_n] = x_1 [x_2 | \ldots | x_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [x_1 | \ldots | x_i x_{i+1} | \ldots x_n] +$$
$$+ (-1)^n [x_1 | \ldots | x_{n-1}].$$

La B-résolution avec l'homomorphisme

$$\varepsilon ; \ B_0 \to Z$$
$$[\ ] \mapsto 1$$

où Z est considéré comme un π-module trivial est une résolution libre du π-module trivial Z, et on a par définition

$$\mathrm{Ext}^n_\pi (Z, A) = H^n (\pi, A) \quad [3]$$

Nous nous proposons de donner ici une autre résolution libre du π-module trivial Z au cas où π est un groupe abélien libre de base $\{t_i\}_{i\in I}$

2.2. Soit π un groupe abélien libre de base $\{t_i\}_{i\in I}$ où I est muni d'un bon ordre. Considérons les π-modules libres X_n ($n \geqslant 0$) de générateurs $u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_n}$ avec $i_1, \dots, i_n \in I$ et $i_1 < \dots < i_n$ et les homomorphismes de π-modules ∂:

(2.2.1) $\partial : X_n \to X_{n-1}\ u_1 \otimes \dots \otimes u_n \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (t_{i_k} - 1)\, u_{i_1} \otimes \dots \otimes \widehat{u_{i_k}} \otimes \dots \otimes u_{i_n}$

où le Λ désigne l'omission.

PROPOSITION 2.3.

(2.3.1) $$\to X_n \xrightarrow{\partial} X_{n-1} \to \dots \to X_1 \xrightarrow{\partial} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0$$

est une résolution libre du π — module trivial **Z.**

Démonstration. Le cas où I est fini est démontré dans [3]. Considérons le cas où I est infini. Soit

$$c = \sum t_{j_1}^{\varepsilon_1} t_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots t_{j_m}^{\varepsilon_m} u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_n} \in X_n$$

où $t_{j_1}^{\varepsilon_1}\ t_{j_2}^{\varepsilon_2}\ t_{j_m}^{\varepsilon_m}$ sont des éléments du groupe abélien libre de base $\{t_i\}_{i\in I}$, et tel que $\partial c = 0$. Soit $I' \subset I$ la partie de I contenant les indices qui se figureut dans les coefficients

et les générateurs $u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_n}$ expriment C. Nous avons un groupe abélien libre de base $(t_i)_{i\in I'}$ et puisque I' est fini, une résolution libre du π' — module trivial Z

$$\to X'_n \xrightarrow{\partial'} X'_{n-1} \to \dots \to X'_1 \xrightarrow{\partial'} X'_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z \to 0$$

où les π' — modules libres X'_n ($n \geqslant 0$) et les homomorphismes ∂' sont définis comme dans 2.2. Le cycle $c \in X'_n$ par conséquent un bord, $c = \partial' x$, $x \in X'_{n+1}$; ou $c = \partial x$ en considérant x comme un élément de X_{n+1}.

2.4. La cohomologie d'un groupe abelien libre π à coefficients dans un π — module A peut être calculée par la résolution (2.3.1) par la formule

$$H^n(\pi, A) \simeq \operatorname{Ext}^n_{\pi}(Z, A)$$

Une n — cochaine $f : X_n \to A$, comme un homomorphisme de module, est determinée par les éléments arbitraires $f(u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \dots \otimes u_{i_n}) \in A$, et

$$\delta f(u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_n}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} (t_{i_k} - 1)\, f(u_{i_1} \otimes \widehat{u_{i_k}} \otimes \dots \otimes u_{i_n})$$

En particulier, si A est un groupe abélien regardé comme un π — module trivial ($t_i = a$ pour tout i), alors δf est tonjours nul, et ainsi $H^n(\pi, A) \simeq \bigoplus\limits_{i\in J} A_i$ où $J = \{(i_1, \dots i_n) \mid i_1 < \dots < i_n\}$ est une partie de I^n et $A_i = A$ pour tout $i \in J$.

2.5. π étant toujours un groupe abélien libre de base $\{t_i\}_{i\in I}$, considérons l'homomorphisme de π — module :

$$h_n : X_n \longrightarrow B_n$$
$$u_{i_1} \otimes \dots \otimes u_{i_n} \longrightarrow \sum_{\sigma\in\sigma_n} s_\sigma [t_{\sigma(i_1)} | \dots | t_{\sigma(i_n)}]$$

où σ_n est le groupe symétrique, s_σ la signature de la permutation σ. Il est clair que nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \to X_n & \xrightarrow{\partial} & X_{n-1} & \to \dots \\ \downarrow h_n & & \downarrow h_{n-1} & \\ \to B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} & \to \dots \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} \to X_1 & \xrightarrow{\partial} & X_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & Z & \to 0 \\ \downarrow h_1 & & \| & & \| & \\ \to B_1 & \xrightarrow{\partial} & B_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & Z & \to 0 \end{array}$$

que nous donne un isomorphisme

(2.5.1) $H^n(h) : H^n(\operatorname{Hom}_\pi(B, A)) \rightleftarrows H^n(\operatorname{Hom}_\pi(X, A))$.

pour tout $n \geqslant 0$ et tout π—module A.

2.6. Nous supposons toujours que π est un groupe abélien libre de base $\{t_i\}_{i\in I}$, noté additivement. Introduisons le complexe de groupes abéliens suivant:

$$L(\pi) : L_3(\pi) \xrightarrow{d_3} L_2(\pi) \xrightarrow{d_2} L_1(\pi) \xrightarrow{d_1} L_0(\pi) \xrightarrow{\tau} 0$$

où

$L_0(\pi) = Z[\pi]$
$L_1(\pi) = Z[\pi \times \pi]$
$L_2(\pi) = Z[\pi \times \pi \times \pi] + Z[\pi \times \pi]$
$L_3(\pi) = Z[\pi \times \pi \times \pi \times \pi] + Z[\pi \times \pi \times \pi] + Z[\pi \times \pi] + Z[\pi]$
$\tau(x) = x$
$d_1[x, y] = [y] - [x + y] + [x]$
$d_2[x, y] = [x, y] - [y, x]$
$d_2[x, y, z] = [y, z] - [x + y, z] + [x, y + z] - [x, y]$
$d_3[x, y, z, t] = [y, z, t] - [x + y, z, t] + [x, y + z, t] - [x, y, z + t] + [x, y, z]$
$d_3[x, y, z,] = [x, y, z] - [x, z, y] + [z, x, y] - [y, z] + [x + y, z] - [x, z]$
$d_3[x, y] = [x, y] + [y, x]$
$d[x] = [x, x]$,

les $Z[\pi^i]$ étant les groupes abéliens libres engendrés par $[x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$, $x_{i_1}, \dots x_{i_n} \in \pi$ et différents de 0. ($i = 1, 2, 3, 4$). et on pose $[x_1, \dots x_i] = 0$ si un de ces x est nul. Puisque L_i est libre, un homomorphisme du groupe L—dans un groupe abélien A est uniquement déterminé par ses valeurs sur les générateurs. D'où le complexe Hom (L(π), A) est identifié au complexe suivant

$\operatorname{Hom}(L(\pi), A) : 0 \to \operatorname{Hom}_Z(\pi, A) \to \operatorname{Hom}(\pi, A) \xrightarrow{\delta_1} \operatorname{Hom}(\pi \times \pi, A) \xrightarrow{\delta_2}$

$\xrightarrow{\delta_2} \operatorname{Hom}(\pi \times \pi \times \pi, A) \times \operatorname{Hom}(\pi \times \pi, A) \xrightarrow{\delta_3} \operatorname{Hom}(\pi \times \pi \times \pi \times \pi, A) \times$
$\times \operatorname{Hom}(\pi \times \pi \times \pi, A) \to \operatorname{Hom}(\pi \times \pi, A) \to \operatorname{Hom}(\pi, A)$

PRODPOSITION 2.6.1. *Le complexe $L(\pi)$ est une « rsolution tronquée » de π, en d'autres termes la suite $L_3 \to L_2 \to L_1 \to \pi \to 0$ est exacte.*

Démonstration. Les L_i étant libres, l'exactitude de $L(\pi)$ est équivalente à l'exactitute des complexes Hom $(L(\pi), A)$ pour A un groupe abélien arbitraire. Démonstrons que Hom $(L(\pi), A)$ est exact. Il est clair qu'il est exact en Hom(π, A) et Hom(π, A). Montrons qu'il est exact en Hom $(\pi\ \pi, A)$. Soit $f: \pi \times \pi \to A$ une application de $\pi \times \pi$ dans A verifiant la condition de normalisation $f(x, y) = 0$ si x ou y est nul. et telle que.

$$(2.6.1.1)\quad \begin{cases} f(y, z) - f(x+y, z) + f(x, y+z) - f(x, y) = 0 \\ f(x, y) - f(y, x) = 0 \end{cases}$$

pour tous $x, y, z \in \pi$. Il est clair que f est un 2 — cocycle symétrique de *Hom* (B, A) où A est considéré comme un π — module trivial (2,1). En vertu de la symétrie de f et de l'isomorphisme (2.5.1) nous obtenons

$$f = \delta g, \text{ avec } g: \pi \to A.$$

et par conséquent

$$(2.6.1.2)\qquad f(x, y) = g(y) - g(x+y) + g(x)$$

pour tous $x, y \in \pi$. D'où l'exactitude en *Hom* $(\pi\times\pi, A)$. Enfin montrons que *Hom* $(L(\pi), A)$ est exact en Hom $(\pi \times \pi \times \pi, A) \times$ *Hom* $(\pi \times \pi, A)$ Soient $f \times Hom(\pi\times\pi\times\pi, A)$ et $g \in Hom(\pi\times\pi, A)$ deux applications vérifiant les conditions de normalisation et telles que

$$(2.6.1.3)\quad \begin{cases} f(y, z, t) - f(x+y, z, t) + f(x, y+z, t) - f(x, y, z+t) + f(x, y, z) = 0 \\ f(x, y, z) - f(x, z, y) + f(z, x, y) - g(y, z) + g(x+y, z) - g(x, z) = 0 \\ g(x, y) + g(y, x) = 0 \\ g(x, x) = 0 \end{cases}$$

i.e. (f, g) est un cocycle de *Hom* $(L(\pi), A)$. Définissons une application $k: \pi \times \pi \to A$ par la relation

$$g(x, y) = k(x, y) - k(y, x)$$

pour tous $x, y \in \pi$, i.e. $g = ant\ k$, et considérons le cocycle

$$(f_1 = f - \delta k,\ g - ant k = 0)$$

Donc $f: \pi\times\pi\times\pi \to A$ vérifie les conditions de normalisation et telle que

$$(2.6.1.4)\quad \begin{cases} f_1(y, z, t) - f_1(x+y, z, t) + f_1(x, y+z, t) - f_1(x, y, z+t) + f_1(x, y, z) = 0 \\ f_1(x, y, z) - f_1(x, z, y) + (z, x, y) = 0 \end{cases}$$

Donc f est un 3—cocycle de Hom (B, A), et en vertu de la dernière relation de (2.6.1.4), l'isomorphisme (2.5.1) nous donne

$$(4.6.1.5)\qquad f = \delta u, \text{ avec } u: \pi \times \pi \to A.$$

Remarquons que *ant* u est une application bilinéaire en vertu de (2.6.1.5) e de la dernière relation de (2.6.1.4). Proposons nous de définir un 2—cocycle v de Hom_π (B, A) tel que

ant v = *ant* u. Pour celà prenons une application bilinéaire

$v: \pi \times \pi \to A$ définie de la façon suivante:

Il est clair que v est un 2-cocycle et *ant* v = *ant*u puisque *ant*u est bilineaire comme nous avons remarqué ci-dessus. Par conséquent nonsobtenons un nouveau cocycle de Hom $(L(\pi), A)$:

$$(f = \delta u, o) + (o = \delta v, ant u = ant\ v) = (\delta u, ant\ u).$$

On en déduit que (f.g) et (f, o) sont des cobords. Or le fait que $(f_1, 0)$ est un cobord montre qu'il existe une application symetrique $g_1: \pi\ \lambda\ \pi \to A$ telle que

$$(2.6.1.6)\qquad f(x, y, z) = g_1(y, z) - g_1(x+y, z) + g_1 x, y+z) - g_1(x, y)$$

pour tous $x, y, z \in \pi$, ce qui nous perment de conclure que

$$(2.6.1.7)\qquad H^3_S(\pi. A) = Z^3_S(\pi, A) / \partial c^2_S(\pi, A) = 0$$

où $Z^3_S(x, A)$ (resp. $c^2_S(\pi, A)$) est le groupe des 3-cocycles (resp. 2-cocycles) (au sens de la cohomologie des groupes) symétriques, i.e. qui vérifient la relation

$$f(x, y, z) - f(x, z, y) + f(z, x, y) = 0 \text{ (resp. } g(x, y) = g(y, x)).$$

3. REPRÉSENTATION D'UNE CATÉGORIE DE PICARD RESTREINTE PAR UN COMPLEXE DE CHAINES

3.1. On se propose ici de chercher à représenter une catégorié de Picard restreinte par un complexe de groupes abéliens en appliquant les résultats de [2] et de (2.6.1).

DEFINITION 3.2. Soit

$$o \to L_1 \xrightarrow{d} L_o \to o$$

un complexe de groupes abéliens, La catégorie de Picard stricte P (i.e. ses contraintes d'associalivite de commutativité et d'u noté sont des identités) définie de la manière suivante:

$$ObP = L_o$$

$$Hom_P(x, y) = \{ (x, y) \times d^{-1}(y - x),\ x, y \in L_o.$$

et pour $((x_1, y_1, f_1): x_1 \to y_1,\ ((x_2, y_2) f_2): x_2 \to y_2$

$$x_1 \otimes x_2 = x_1 + x_2$$

$$((x_1, y_1), f) \otimes ((x_2, y_2), f_2) = ((x_1 + x_2, y_1 + y_2), f_1 + f_2)$$

est appelée *catégorie de Picard stricte définie par un complexe de groupes abéliens*. Représenter une categorie de Picard restreinte par un complexe de groupes abéliens, c'est montrer que la catégorie est équivalente à une catégorie de Picard stricte définie par un complexe de groupes abéliens.

PROPOSITION 3.3. *Toute catégorie de Picard restrinte peut ètre representée par un complexe de groupes abéliens.*

Demonstration Soit P une catégorie de Picard restreinte dont la categorie réduite est S(M, N, α, o) [1], òu α est un 3 — cocycle symétrique de $Hom_M(B(Z(M)), N)$, N étant considéré comme un M—module trivial. Soit L le groupe abélien libre engendré par les élements $M-\{o\}$ et $u : L_o \to M$ l'homomorphisme canonique En vertu de (2.6.1.6), il existe une application symétrique $f : L_o \times L_o \to N$ telle que

$$\alpha(u(x), u(y), u(z)) = f(y, z) - f(x+y, z) + f(x, y+z) - f(x, y)$$

pour tous $x, y, z \in L_o$. Remarquons que $f_{|\mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{Ker}\, u}$ est un 2 – cocycle. Or étant un sous – groupe d'un groupe abélien libre Ker u est aussi un groupe abélien libre, et par conséquent en vertu de (2.61.) il existe $g : \mathrm{Ker}\, u \to N$ telle que

$$f(x, y) = g(y) - g(x+y) + g(x)$$

pour tous x, y Ker u. Définissons $g : L_o \to N$ de la manière suivante

$$g'(x) = g(x), \quad x \in \mathrm{Ker}\, u$$
$$g'(x) \text{ arbitraire pour } x \notin \mathrm{Ker}\, u$$

et $f' : L_o \times L_o \to N$ par :

$$f'(x, y) = g'(y) - g'(x+y) + g'(x).$$

Il est clair que $\delta f' = 0$ et $f'_{|\mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{Ker}\, u} = f_{|\mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{Ker}\, u}$ et par conséquent en posant

$$\breve{u} = f - f'$$

nous obtenons

(3.3.1) $$u(\alpha) = \delta u, \breve{u} \text{ symétrique}$$

et

(3.3.2) $$\breve{u}_{|\mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{Ker}\, u} = 0$$

En appliquant les résultats de [2] et compte tenu de (3.3.1) (3.3.2), nous avons P équivalente a la catégorie de Picard stricte définir par le comptexe

$$L : 0 \to L_1 \xrightarrow{d} L_o \to 0$$

où

$$L_1 = \mathrm{Ker} u \times N \text{ et}$$
$$d : L_1 = \mathrm{Ker} u \times N \to L_o$$
$$(x, m) \mapsto x.$$

Remarquons que nous avons

$$H(L) = \pi_o(P) = M$$
$$H(L) = \pi_o(\underline{P}) = N$$

i.e. les groupes homologiques du complexe sont les invariants de P.

CORLLAIRE 3.3. La classification des catégories de Picard pr préépinglées de type (M, N) qui sont restreintes est triviale.

Received April 22, 82

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hoàng Xuân Sính : *Thèse*, Paris 1975.

[2] ——— : *Gr – catégories strictes*. Acta Mathematica Vietnamica, Tome 3, No2 (1978).

[3] MacLane, S : *Homology*. Springer Verlag 1967.