Lösung zur Klausur HM 2
el+phys+kyb+geod

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

29.7.2006

Name	**Vorname**	**Matr.-nummer**	**Gruppe**

Saal	**Reihe**	**Platz**

Anmerkungen zur Korrektur: Aufgabe 1.3.a: Andere Formen der Darstellung bzw. Abschätzung des Restglieds werden auch akzeptiert.

1.1	1.2	1.3	**Aufgabe 1**	2.1	2.2	2.3	**Aufgabe 2**

1	2			Summe	Note

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.1 ein:

Aufgabe 1.1	Ergebnis
1.1.a	$\frac{1}{4}$
1.1.b	$\frac{1}{\sqrt{e}}$

Aufgabe 1.1		Ja	Nein
1.1.c	Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$ konvergiert	X	☐
1.1.d	Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 n}{2^n}$ konvergiert.	X	☐
1.1.e	Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(1+n^2)}$ konvergiert	X	☐

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.2 ein:

Aufgabe 1.2		Ergebnis
1.2.a	$\lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}$	-2
1.2.b	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2}$	$-\frac{1}{2}$

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 2.1 ein:

Aufgabe 2.1		Ergebnis
2.1.a	$\int x\, e^x\, dx$	$xe^x - e^x + C$
2.1.b	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$	$\frac{1}{\cos x} + C$

Aufgabe 1 (15 Punkte)

1.1 (5 Punkte) Bestimmen Sie Konvergenzradien folgender Potenzreihen und tragen Sie diese in die Tabelle auf Seite 1 ein:

1.1.a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+(-3)^n}{n^2}\, x^n$

Die Formel von Cauchy-Hadamard ergibt:

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n+(-3)^n}{n^2}} = 4 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1+(-3/4)^n}{n^2}} = 4\,.$$

1.1.b $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}} x^n$

Die Formel von Cauchy-Hadamard ergibt:

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt{e}\,.$$

Sind desweiteren folgende Aussagen wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 1. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.1.c Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{2^n}$ konvergiert.

Da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1\,,$$

konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

1.1.d Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 n}{2^n}$ konvergiert.

Da

$$\frac{n\cos^2 n}{2^n} \le \frac{n}{2^n}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1\,,$$

konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

1.1.e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}(1+n^2)}$ konvergiert.

Für $n \geq 1$ gilt

$$\frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(1+n^2)} \leq \frac{1}{1+n^2}\,.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ konvergiert, so konvergiert nach dem majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}(1+n^2)}$.

1.2 (4 Punkte) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte und tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.2.a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1-x}\,.$$

Nach der Regel von l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x + \frac{x+1}{x})\, x^{x+1}(\ln x + 1) + \frac{1}{x}\, x^{x+1} - 1}{-1} = -2\,.$$

1.2.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2}\,.$$

Zweifache Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sinh x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cosh x}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

1.3 (6 Punkte)

1.3.a Formulieren Sie den Satz von Taylor für Funktionen einer reellen Variablen mit Angabe des Restgliedes.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 $(m+1)-$fach stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)h^k + r_m(x_0,h)\,,$$

wobei

$$r_m(x_0,h) = \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^1 f^{(m+1)}(x_0+th)(1-t)^m\,dt\,.$$

1.3.b Beweisen Sie, dass

$$\ln(x+1) \le x\,, \qquad \forall\, x \ge 0\,.$$

Aus aus dem Satz von Taylor angewandet auf die Funktion $\ln(x+1)$ im Punkt $x_0 = 0$ folgt, dass

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x + r_1(0,x)\,.$$

Da

$$(\ln(x+1))''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0 \quad \forall\, x \ge 0\,,$$

findet man, dass $r_1(0,x) = x^2 \int_0^1 f''(tx)(1-t)\,dt < 0$ und damit

$$\ln(1+x) \le \ln 1 + x = x\,.$$

Alternative Lösung:

$$|(\ln(x+1))'| = \frac{1}{1+x} \le 1 \quad \forall\, x \ge 0\,.$$

Also folgt mit Hauptsatz der Differentialrechnung, dass

$$\ln(x+1) = \ln(x+1) - \ln 1 \le x \quad \forall\, x \ge 0\,.$$

Aufgabe 2 (15 Punkte)

2.1 (4 Punkte) Bestimmen Sie folgende Integrale und tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

2.1.a

$$\int x\, e^x\, dx.$$

Partielle Integration ergibt:

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx + C = x\, e^x - e^x + C\,.$$

2.1.b

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx.$$

Nach der Substitution $t = \cos x$ bekommen wir

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C\,.$$

2.2 (6 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = (x^2 - 1)\, e^{-x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

auf lokale und globale Extremwerte. Wie verhält sich die Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$?

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x(x^2 - 1)\, e^{-x^2} = 2x(2 - x^2)\, e^{-x^2}\,.$$

Kritische Pukte: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$.

Aus

$$f''(0) > 0, \quad f''(\sqrt{2}) = f''(-\sqrt{2}) < 0\,,$$

folgt, dass im Punkt $x_1 = 0$ ein lokales Minimum angenommen wird und dass in den Punkten x_2 und x_3 lokale Maxima sind. Ausserdem gilt nach l'Hospital, dass

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x\, e^{x^2}} = 0\,.$$

Also ist $f(0) = -1$ auch globales Minimum und $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = e^{-2}$ sind globale Maxima der Funktion f.

2.3 (5 Punkte) Finden Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2\,, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

und entscheiden Sie, ob sie in diesen Punkten ein lokales Minimum bzw. ein lokales Maximum annimmt.

Gleichungen für die kritischen Punkte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 2x - 2y = 0\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3 - 2x - 2y = 0\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt $4x^3 - 4y^3 = 0$, also $x = y$. Damit findet man aus $4x^3 - 4x = 0$ drei Lösungen:

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1,1), \quad P_3 = (-1,-1)\,.$$

Die zweiten partiellen Ableitungen von f sind durch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$

gegeben. Für die Hesse-Matrix $H(x,y)$ erhalten wir

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Die Spur und die Determinante der Matrix

$$H(-1,-1) = H(1,1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

sind positiv, also sind auch die Eigenwerte von $H(-1,-1)$ und $H(1,1)$ positiv. Es folgt, dass die Funktion f in den Punkten $P_2 = (1,1)$ und $P_3 = (-1,-1)$ jeweils ein lokales Minimum annimmt.

Auf der anderen Seite ist die Determinante der Matrix

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

gleich Null und deswegen ist auch ein Eigenwert von $H(0,0)$ gleich Null. Folglich nimmt die Funktion f im Punkt $(0,0)$ keinen Extremwert an.