Übungsscheinklausur HM 1
el+phys+kyb+geod
Teil 2

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

18.2.2006

Name	**Vorname**	**Matr.-nummer**	**Gruppe**

Saal	**Reihe**	**Platz**

Anmerkungen zur Korrektur:

3.1	3.2	3.3	**Aufgabe 3**	4.1	4.2	4.3	**Aufgabe 4**

1	2	3	4	Summe	Note

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 3.1 ein:

Aufgabe 3.1		Ergebnis
3.1.a	$< \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{a} >$	-2
3.1.b	$< 2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} >$	0
3.1.c	$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$	$(4, -12, -4)^T$
3.1.d	$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - < \mathbf{a}, \mathbf{c} > \mathbf{b} + < \mathbf{a}, \mathbf{b} > \mathbf{c}$	$(0, 0, 0)^T$
3.1.e	$< \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} > - < \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{a} >$	0

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 4.1 ein:

Aufgabe 4.1		Ja	Nein
4.1.a	$A = A^* \quad \Rightarrow \quad$ ONB aus Eigenvektoren	☒	☐
4.1.b	$B^{-1} = B^* \quad \Rightarrow \quad \sigma(B) \subset \{z \in \mathbb{C} : \vert z\vert = 1\}$	☒	☐
4.1.c	$A = A^* \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \vert z\vert = 1\}$	☐	☒
4.1.d	$B^{-1} = B^* \quad \Rightarrow \quad B$ ist diagonalisierbar	☒	☐
4.1.e	$A^2 = \mathbb{O} \quad \Rightarrow \quad A$ ist diagonalisierbar	☐	☒

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 4.2 ein:

Aufgabe 4.2		Ergebnis
4.2.a	die Eigenwerte von A	$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$
4.2.b	die Eigenräume von A	$E_0 = t_1(-i, 0, 1)^T, E_1 = t_2(0, 1, 0)^T,$ $E_2 = t_3(i, 0, 1)^T, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}.$
4.2.c	algebraische Vielfachheit	$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$
4.2.d	geometrische Vielfachheit	$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$
4.2.e	ONB von Eigenvektoren	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 0, 1)^T.$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $\mathbf{a} = 0\vec{A}, \quad \mathbf{b} = 0\vec{B}, \quad \mathbf{c} = 0\vec{C}$ mit

$$A = (0, 2, 1), \qquad B = (1, -1, 0), \qquad C = (2, 0, 2)$$

gegeben.

3.1 (5 Punkte) Bestimmen Sie folgende Größen und tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

3.1.a $\quad < \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{a} > = < \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} > = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$

3.1.b $\quad < 2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} > = 2 < \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} > + < \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} > = 0 + 0 = 0$
da $\mathbf{a} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *und* $\mathbf{b} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

3.1.c

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \ + \ \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \ + \ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (0, 0, 0)^T$$

nach Jacobi-Identität, also wegen $\mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

$$\begin{aligned} & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \ + \ \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \ + \ \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ = \ & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \ + \ \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \ + \ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + 2\mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ = \ & (0, 0, 0)^T + 2\mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 2(\mathbf{b} < \mathbf{c}, \mathbf{a} > - \mathbf{a} < \mathbf{c}, \mathbf{b} >) \\ = \ & 2(2, -6, -2)^T = (4, -12, -4)^T \end{aligned}$$

3.1.d $\quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) - < \mathbf{a}, \mathbf{c} > \mathbf{b} + < \mathbf{a}, \mathbf{b} > \mathbf{c} = (0, 0, 0)^T$ *(Regel "bac minus cab")*

3.1.e $\quad < \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} > - < \mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{a} > = 0$ *(zyklisches Vertauschen der Vektoren im Spatprodukt)*

3.2 (5 Punkte) Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs 0=(0,0,0) zur Ebene E, welche die Punkte A, B und C enthält sowie den Abstand des Punktes A zu der Geraden, welche die Punkte B und C enthält.

Lösung: Sei $\mathbf{s} = \vec{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (1, -3, -1)^T$ *und* $\mathbf{t} = \vec{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (2, -2, 1)^T$*. Die Ebene* E_{ABC} *ist gegeben durch*

$$(x-0)n_x + (y-2)n_y + (z-1)n_z \quad \textit{mit} \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{s} \times \mathbf{t}\|}.$$

Wegen

$$\mathbf{s} \times \mathbf{t} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -3, 4)^T \quad \textit{folgt} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand h *vom Ursprung zur Ebene ist gegeben durch die Länge der Projektion von* $\vec{0A} = \mathbf{a}$ *auf* $\mathbf{n}$*, also*

$$h = |<\mathbf{a}, \mathbf{n}>| = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot |\, 0 \cdot (-5) + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4\,| = \frac{2}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Alternativ ist das Volumen des Tetraeders $0ABC$ *mit der Höhe* h *und der Grundfläche* $|ABC|$ *gegeben durch*

$$\frac{1}{6}|<\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}>| = V_{0ABC} = \frac{1}{3} h \cdot |ABC| = \frac{1}{6} h \|\mathbf{s} \times \mathbf{t}\|$$

und somit

$$h = \frac{|<\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}>|}{\|\mathbf{s} \times \mathbf{t}\|} = \frac{2}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Die Punktmenge der Gerade g *durch die Punkte* B *und* C *ist gegeben durch*

$$g = \{\mathbf{b} + \alpha \cdot \mathbf{r},\, \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \textit{mit dem Richtungsvektor} \quad \mathbf{r} = \vec{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für den Abstand d *des Punktes* A *zur Gerade* g*, dass der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks* ABC *gegeben ist durch die Höhe* d *multipliziert mit der Länge der Grundseite* $\mathbf{r}$ *als auch durch die Länge des Kreuzproduktes* $\vec{AB} \times \vec{AC} = \mathbf{s} \times \mathbf{t}$*, d.h.*

$$|ABC| = d \cdot |\mathbf{r}| = \|\mathbf{s} \times \mathbf{t}\| \quad \textit{also} \quad d = \frac{\|\mathbf{s} \times \mathbf{t}\|}{|\mathbf{r}|} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

3.3 (5 Punkte) Geben Sie eine Matrix $A \in M^3(\mathbb{R})$ an, für welche die oben gegebenen Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ Eigenvektoren mit den entsprechenden Eigenwerten $\lambda_{\mathbf{a}} = 1$, $\lambda_{\mathbf{b}} = 2$ und $\lambda_{\mathbf{c}} = 3$ sind. Bestimmen Sie die Spur und die Determinante dieser Matrix. Ist diese Matrix diagonalisierbar? Ist die Matrix A eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

Lösung: Die Matrix $A \in M^3(\mathbb{R})$ besitzt drei verschiedene Eigenwerte. Deshalb ist deren algebraische Vielfachheit 1. Da die geometrische Vielfachheit die algebraische nicht übersteigt, ist diese ebenfalls 1. Das Spektrum ist einfach, die Matrix A ist damit diagonalisierbar. Sie läßt sich also in der Form

$$A = \tilde{X}\, diag\{\lambda_{\mathbf{a}}, \lambda_{\mathbf{b}}, \lambda_{\mathbf{c}}\}\, X$$

darstellen, wobei die Spalten von $\tilde{X}$ den respektiven Eigenvektoren entsprechen, $\tilde{X} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ sowie $X = \tilde{X}^{-1}$. Diese Darstellung bestimmt A eindeutig. Für

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{gilt} \quad X = \tilde{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren gilt $\det A = \lambda_{\mathbf{a}}\lambda_{\mathbf{b}}\lambda_{\mathbf{c}} = 6$ und $Tr\, A = \lambda_{\mathbf{a}} + \lambda_{\mathbf{b}} + \lambda_{\mathbf{c}} = 6$.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

4.1 (5 Punkte) Sind folgende Aussagen für allgemeine Matrizen $A, B \in M^n(\mathbb{C})$ wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 2. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

4.1.a $A = A^* \quad \Rightarrow \quad A$ besitzt eine ONB aus Eigenvektoren *Wahr nach Spektralsatz für s.a. Matrizen*

4.1.b $B^{-1} = B^* \quad \Rightarrow \quad \sigma(B) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *Wahr, da für die unitäre Matrix B mit dem Eigenvektor $\mathbf{x}$gilt*

$$\|\mathbf{x}\|^2 =< \mathbf{x}, \mathbf{x} >=< B\mathbf{x}, B\mathbf{x} >=< \lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} >= |\lambda|^2\|\mathbf{x}\|^2.$$

4.1.c $A = A^* \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *Nicht wahr, z.B.* $A = 2\mathbb{I}$, $\sigma(A) = \{2\}$.

4.1.d $B^{-1} = B^* \quad \Rightarrow \quad B$ ist diagonalisierbar *Wahr nach Spektralsatz für unitäre Matrizen*

4.1.e $A^2 = \mathbb{O} \quad \Rightarrow \quad A$ ist diagonalisierbar *Nicht wahr, z.B.* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2 (5 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M^3(\mathbb{C}).$$

Berechnen Sie folgende Größen und tragen Sie diese in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

4.2.a die Eigenwerte von A

Es gilt

$$d_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 - (-i)(1-\lambda)i = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1] = (1-\lambda)(2-\lambda)\lambda$$

und damit $\sigma(A) = \{1, 2, 0\}$.

4.2.b die Eigenräume von A

Die Anwendung des Gaußschen Algorithmus zur Lösung homogener Gleichungssysteme liefert

$$\begin{aligned} E_0 &= kerA = \{t_1(-i, 0, 1)^T\}, \\ E_1 &= ker(A - \mathbb{I}) = \{t_2(0, 1, 0)^T\}, \\ E_2 &= ker(A - 2\mathbb{I}) = \{t_3(i, 0, 1)^T\}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

4.2.c die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte von A *Das Spektrum ist einfach.*

4.2.d die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte von A *Das Spektrum ist einfach.*

4.2.e Geben Sie eine ONB von Eigenvektoren von A an. *Da die Matrix s.a. ist, sind die oben gefundenen Eigenvektoren bereits orthogonal zueinander. Die Normierung ergibt dann*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-i,0,1)^T, \quad (0,1,0)^T, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(i,0,1)^T.$$

4.3 (5 Punkte) Stellen Sie die lineare Abbildung $\mathcal{A}$, welche in der Standardbasis $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in $\mathbb{C}^3$ durch die in 4.2 beschriebene Matrix A gegeben ist, als Matrix $\tilde{A} = \mathcal{A}(\mathbf{f},\mathbf{f})$ bezüglich der Basis

$$\mathbf{f} = \left\{ (\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5})^T, (\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})^T, (0,1,0)^T \right\}$$

dar. Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

Lösung: Die Matrix

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

bildet die Basis $\mathbf{e}$ *auf die Basis* $\mathbf{f}$ *ab. Zudem ist* $\tilde{F}$ *orthogonal, d.h.* $F = \tilde{F}^{-1} = \tilde{F}^T$. *Damit gilt* $\mathcal{A}(\mathbf{e},\mathbf{e}) = \tilde{F}\mathcal{A}(\mathbf{f},\mathbf{f})\tilde{F}^T$ *und folglich* $\mathcal{A}(\mathbf{f},\mathbf{f}) = \tilde{F}^T\mathcal{A}(\mathbf{e},\mathbf{e})\tilde{F}$, *also*

$$\mathcal{A}(\mathbf{f},\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$