Lösung zur Übungsscheinklausur HM 1
Teil 1

February 18, 2006

Aufgabe 1 (15 Punkte)

1.1 (5 Punkte) Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.1 ein:

Aufgabe 1		Ja	Nein
1.1.a	$\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \quad \overline{z}w = z\overline{w}$	☐	x
1.1.b	$\exists_{z,w\in\mathbb{C}} \quad \overline{z} + w = z + \overline{w}$	x	☐
1.1.c	$\forall_{z\in\mathbb{C}}\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \overline{z^n} = (\overline{z})^n$	x	☐
1.1.d	$\forall_{z,w\in\mathbb{C}} \quad \lvert\overline{z} + w\rvert = \lvert z + \overline{w}\rvert$	x	☐
1.1.e	$\forall_{z\in\mathbb{C}} \quad \lvert z + \overline{z}\rvert \geq \lvert z\rvert$	☐	x

1.2 (5 Punkte) Beweisen Sie, daß für alle komplexen Zahlen $z \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Summationsformel

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1} - z}{(z-1)^2}$$

gilt. Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

Lösung Induktionsvoraussetzung:

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}\,.$$

Da

$$\frac{z^2}{z-1} - \frac{z^2-z}{(z-1)^2} = z\,,$$

gilt die Aussage für $n = 1$. Aus der Induktionsvorassetzung dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kz^k &= = \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2} + (n+1)\,z^{n+1} \\
&= \frac{nz^{n+1} + n(z-1)z^{n+1} + z^{n+2}}{z-1} - \frac{z^{n+1} - z - (z-1)^2 z^{n+1} + (z-1)z^{n+2}}{(z-1)^2} \\
&= \frac{(n+1)z^{n+2}}{z-1} - \frac{z^{n+2}-z}{(z-1)^2}
\end{aligned}$$

und damit ist den Induktionsschritt bewiesen.

1.3 (5 Punkte) Zeigen Sie, daß für alle komplexen Zahlen z mit $|z| < 1$ die Folge

$$s_n(z) := \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}$$

für $n \to \infty$ konvergiert und berechnen Sie den Grenwert! Gibt es komplexe Zahlen z mit $|z| > 1$, für welche diese Folge konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

Lösung

$$\left| s_n(z) - \frac{z}{(z-1)^2} \right| = \left| \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1}}{(z-1)^2} \right| \le \frac{n|z|^{n+1}}{|z-1|} + \frac{|z|^{n+1}}{|z-1|^2}\,.$$

Da $|z| < 1$, konvergiert $n|z|^{n+1}$ sowie $|z|^{n+1}$ für $n \to \infty$ gegen Null. Daraus folgt

$$\left| s_n(z) - \frac{z}{(z-1)^2} \right| \to 0$$

und das heißt

$$s_n(z) \to \frac{z}{(z-1)^2}\,, \quad n \to \infty.$$

Für $|z| > 1$ konvergiert die Folge nicht. Um dies zu beweisen, zeigen wir, dass $|s_n(z)| \to \infty$.

$$|s_n(z)| = \left| \frac{z^{n+1}(nz - n - 1) + z}{(z-1)^2} \right| \geq \frac{|z|^{n+1}|nz - n - 1| - |z|}{|z-1|^2} .$$

Für n genugend groß gilt $|nz - n - 1| \geq n|z| - (n+1) \geq 1$. Da $|z| > 1$, konvergiert $|z|^{n+1}$ für $n \to \infty$ gegen unendlich und damit

$$|s_n(z)| \to \infty, \quad n \to \infty .$$

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Gegeben sei ein reeller Parameter t und die Matrizen

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

2.1 (5 Punkte) Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 2.1 ein:

Aufgabe 2.1		Ja	Nein
2.1.a	B ist invertierbar	x	☐
2.1.b	$A(t)$ und B kommutieren für $t = 1$	☐	x
2.1.c	B ist symmetrisch	☐	x
2.1.d	B ist orthogonal	☐	x
2.1.e	$\exists!_{t \in \mathbb{R}}\ A(t)$ selbstadjungiert	x	☐

2.2 (5 Punkte) Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 2.2 ein:

Aufgabe 2.2		Ergebnis
2.2.a	$\det B^T B^{-1}$	1
2.2.b	$\mathrm{Tr}(B^2 A - BAB)$	0
2.2.c	$\det(BAB^{-1})$	$1 + t$
2.2.d	$\det B^T BAA^T - (\det(AB))^2$	0
2.2.e	$\mathrm{Tr}\,(B - B^T)$	0

2.3 (5 Punkte) Untersuchen Sie mit Hilfe einer geeigneten Fallunterscheidung die Lösbarkeit in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems

$$A(t)\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems. Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

Lösung Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Fallunterscheidung:

1. $t = -1$. Das Gleichungssytem ist nur dann lösbar, wenn $y_1 + y_3 = 0$. In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen:

   $$x = \begin{pmatrix} y_1 + s \\ y_2 \\ s \end{pmatrix},$$

   wobei s ein beliebiger reeller Parameter ist.

2. $t \neq -1$. Es existiert genau eine Lösung:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{y_1 - t y_3}{1+t} \\ y_2 \\ \frac{y_1 + y_3}{1+t} \end{pmatrix}.$$