Lösung zur Probeklausur zur HM 1 am 16.1.2006

Aufgabe 1

a) Sei i die imaginäre Einheit. Finden Sie die Werte von

$$\mathrm{Ln}\,\frac{1+i}{1-i}.$$

b) Sei $p(z)$ ein Polynom in der komplexen Variablen z mit ausschließlich reellen Koeffizienten. Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $p(z)p(\overline{z})$ eine nichtnegative reelle Zahl.

c) Bestimmen Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für welche

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1.$$

Lösung

a)

$$\mathrm{Ln}\,\frac{1+i}{1-i} = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2}\,(1+i)^2\right) = \mathrm{Ln}\,i = \ln\,|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

b)

$$p(z) = c_0 + c_1\,z + \cdots + c_n\,z^n, \quad c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\,.$$

Wegen

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,, \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

gilt $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$. Daraus folgt

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \qquad p(z)\,p(\overline{z}) = |p(z)|^2 \geq 0\,.$$

c)

$$|\sin z|^2 = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{-i\overline{z}} - e^{i\overline{z}}}{-2i} = \frac{1}{4}\left(e^{i(z-\overline{z})} - e^{i(z+\overline{z})} - e^{-i(z+\overline{z})} + e^{i(\overline{z}-z)}\right)\,.$$

$$|\cos z|^2 = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{-i\overline{z}} + e^{i\overline{z}}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{i(z-\overline{z})} + e^{i(z+\overline{z})} + e^{-i(z+\overline{z})} + e^{i(\overline{z}-z)}\right)\,.$$

Also

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = \frac{1}{2}\left(e^{i(z-\overline{z})} + e^{i(\overline{z}-z)}\right) .$$

Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = \cosh(2y) .$$

Also ist $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1$ dann und nur dann, wenn $y = 0$, d.h. dann und nur dann wenn $z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie Tr A, $\det$ B sowie $[A, B]$.

b) Welche der Matrizen A, B und AB sind invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Inversen.

c) Für welche $f \in \mathbb{R}^3$ ist die Gleichung $Ax = f$ für $x \in \mathbb{R}^3$ lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

Lösung

a)

$$\text{Tr}\, A = 1 + 3 + 1 = 5\,, \quad \text{det} B = -1\,.$$

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 7 & 12 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

b) Aus det$A = 3 + 2 - 4 - 1 = 0$ folgt det$(AB) =$ det$A \cdot$ det$B = 0$. Also ist nur die Matrix B invertierbar:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

c) Sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Lösbarkeit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei wir von der zweiten Zeile die erste und die dritte Zeile abgezogen haben. Die Gleichung $Ax = f$ ist also nur dann lösbar, wenn $f_2 = f_1 + f_3$.

Lösungsmenge:

Falls $f_2 \neq f_1 + f_3$, so gibs es keine Lösung.

Für $f_2 = f_1 + f_3$, so besitzt die Gleichung $Ax = f$ unendlich viele Lösungen, die durch $t \in \mathbb{R}$ parametrisiert sind:

$$x_1 = f_1 - 2t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = f_3 - f_1 + t\,.$$