Nachklausur zum Übungsschein HM 1
el+phys+kyb+geod

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

19.5.2006

Name	**Vorname**	**Matr.-nummer**	**Gruppe**

Saal	**Reihe**	**Platz**

Anmerkungen zur Korrektur:

1.1	1.2	1.3	**Aufgabe 1**	2.1	2.2	2.3	**Aufgabe 2**

1	2			Summe	Note

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.1 ein:

Aufgabe 1.1		Ergebnis
1.1.a	$\ln \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$	$2\pi i(k+\frac{1}{3}), \quad k \in \mathbb{Z}$
1.1.b	$\arg(e^{\sqrt{i}})$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \bmod 2\pi$
1.1.c	$\lvert z \cdot \overline{z^{-1}}\rvert$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$	1
1.1.d	$\frac{2\cos(i)}{e+e^{-1}}$	1
1.1.e	$\frac{3+i}{1-i}$	$1+2i$

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.2 ein:

Aufgabe 1.2		Ja	Nein
1.2.a	$(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p \Rightarrow \neg q)$	☐	☒
1.2.b	$(p \wedge q) \;\Leftrightarrow \neg(p \vee q)$	☐	☒
1.2.c	$(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p \vee q)$	☒	☐
1.2.d	$\neg(p \wedge \neg q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p \vee q)$	☒	☐
1.2.e	$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$	☒	☐

Bitte tragen Sie in die folgenden Tabellen die Lösungen der Aufgaben 2.1 ein:

Aufgabe 2.1		Ergebnis
2.1.a	$\det A$	4
2.1.b	$\sigma(A)$	$\{i \cdot \sqrt{2}, -i \cdot \sqrt{2}, 1+i, 1-i\}$

Aufgabe 2.1		Ja	Nein
2.1.c	A ist unitär	☐	☒
2.1.d	A ist selbstadjungiert	☐	☒
2.1.e	A ist diagonalisierbar	☒	☐

Aufgabe 1 (15 Punkte)

1.1 (5 Punkte) Bestimmen Sie alle Werte folgender Größen und tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.1.a $\ln \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

Es gilt $|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}| = 1$. *Da* $arg(1 \pm i\sqrt{3}) = \pm \arctan \sqrt{3} = \pm\pi/3$ *folgt* $arg\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3}\, mod\, 2\pi$. *Dies ergibt*

$$\ln \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \ln 1 + i\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi i = 2\pi i(k + \frac{1}{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1.1.b $\arg(e^{\sqrt{i}})$

Aus $\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ *folgt* $arg(e^{\sqrt{i}}) = Im\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\, mod\, 2\pi$.

1.1.c $|z \cdot \overline{z^{-1}}|$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

Es gilt $|z \cdot \overline{z^{-1}}| = |z| \cdot |\overline{z^{-1}}| = |z| \cdot |z^{-1}| = |z| \cdot \frac{1}{|z|} = 1$.

1.1.d $\frac{2\cos(i)}{e+e^{-1}}$

Wegen $\cos(i) = \frac{e^{i \cdot i}+e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2}$ *besitzt der gesuchte Ausdruck den Wert* 1.

1.1.e $\frac{3+i}{1-i}$

Der Quotient ergibt

$$\frac{3+i}{1-i} = \frac{3+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i.$$

1.2 (5 Punkte) Welche der folgenden Ausdrücke beschreiben ein logisches Gesetz? Tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.2.a $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$

Falsch, z.B. für $p = f$ und $q = w$ ist $f \Rightarrow w$ wahr aber $w \Rightarrow f$ falsch.

1.2.b $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

Falsch, z.B. für $p = q = w$ ist $w \wedge w$ wahr aber $\neg(w \vee w)$ falsch.

1.2.c $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Wahr, betrachte die entsprechende Wahrheitstabelle.

1.2.d $\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Wahr, betrachte die entsprechende Wahrheitstabelle.

1.2.e $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$

Wahr, betrachte die entsprechende Wahrheitstabelle.

1.3 (5 Punkte) Es sei $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Beweisen Sie, daß für $0 \leq k \leq n-1$ die Identität

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Die Definition der binomischen Koeffizienten ergibt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(k+1) \cdot n! + (n-k) \cdot n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nutzen Sie desweiteren diese Aussage, um die Gleichheit

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$$

zu beweisen.

Die Aussage folgt mit einem Induktionsbeweis.

IA: Für $n = 1$ *ist* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$. *IV: Sei* $\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$. *IS: Unter Berücksichtigung obiger Identität folgt*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n+1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} + 1 \\
&= \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (15 Punkte)

2.1 (5 Punkte) Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie folgende Größen und tragen Sie diese in die Tabelle auf Seite 2 ein:

2.1.a $\det A$ 2.1.b $\sigma(A)$

Die Matrix A *ist eine Blockmatrix* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ *mit* $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *und* $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. *Dann gilt*

$\det A = \det A_1 \cdot \det A_2 = (0 \cdot 0 - 2 \cdot (-1)) \cdot (1 \cdot 1 - i \cdot i) = 2 \cdot 2 = 4.$

Ebenso ist $d_A(\lambda) = d_{A_1}(\lambda) \cdot d_{A_2}(\lambda)$ *und somit* $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$. *Es folgt*

$$\begin{aligned} d_{A_1}(\lambda) &= \lambda^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{2}. \\ d_{A_2}(\lambda) &= (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda_{3,4} = 1 \pm i \end{aligned}$$

und somit $\sigma(A) = \{i \cdot \sqrt{2}, -i \cdot \sqrt{2}, 1+i, 1-i\}$.

Sind desweiteren folgende Aussagen wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 2. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

2.1.c A ist unitär

Nein, denn für unitäre A *gilt* $|\det A| = 1$, *aber wir haben* $\det A = 4$.

2.1.d A ist selbstadjungiert

Nein, denn offensichtlich ist $A \neq A^*$.

2.1.e A ist diagonalisierbar.

Ja, denn das Spektrum von A *ist einfach.*

2.2 (5 Punkte) Untersuchen Sie, ob für beliebige Matrizen $A, B \in M^n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$, folgende Aussagen wahr sind und begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

2.2.a Aus $[A, B] = 0$ folgt $[A, B^m] = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aus $AB = BA$ *folgt durch Multiplikation mit* B *von rechts*

$$AB^2 = BAB = B(AB) = B(BA) = B^2 A.$$

Dieses Argument läßt sich mit Induktion fortführen zu $[A, B^m] = 0$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$; *die Aussage ist also wahr.*

2.2.b Für invertierbare B folgt aus $[A, B] = 0$ zudem $[A, B^{-m}] = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aus $AB = BA$ folgt durch Multiplikation mit B^{-1} von rechts

$$\begin{aligned} B^{-1}A &= B^{-1}A(BB^{-1}) = B^{-1}(AB)B^{-1} \\ &= B^{-1}(BA)B^{-1} = (B^{-1}B)AB^{-1} = B^{-1}A, \end{aligned}$$

also $[A, B^{-1}] = 0$. Nach 2.2.a folgt nun $[A, B^{-m}] = [A, (B^{-1})^m] = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$; die Aussage ist also wahr.

2.2.c Aus $[A, B] = 0$ folgt $[A, B^*] = 0$.

Falsch. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ aber $AB^* - B^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.3 (5 Punkte) Untersuchen Sie mit Hilfe einer geeigneten Fallunterscheidung die Lösbarkeit in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems. Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

Sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\det A(t) = (-1) \cdot (-1 \cdot t) = t$. Ist also $t \neq 0$, so ist die Gleichung für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar und

$$\mathbf{x} = A^{-1}(t)\mathbf{y}, \quad A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2t^{-1} & t^{-1} & -t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Für $t = 0$ geht die Gleichung in

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

über. Der Rang von $A(t)$ ist 2, es gibt also eine Lösungsbedingung an $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, nähmlich $y_3 = -2y_1 + y_2$. Für solche $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ist die Lösung gegeben durch $x_1 = -y_1$, $x_2 = y_2$ und beliebiges $x_3 \in \mathbb{R}$.