# Lösung zur Prüfung HM 1,2
# el+phys+kyb+geod, Teil 2

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

29.7.2006

| **Name** | **Vorname** | **Matr.-nummer** | **Raum** |
|---|---|---|---|
| | | | |

Anmerkungen zur Korrektur:

| 3.1 | 3.2 | 3.3 | **Aufgabe 3** | 4.1 | 4.2 | 4.3 | **Aufgabe 4** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

| 3 | 4 | | | Summe | Note |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 3.1 ein:

| Aufgabe 3.1 | Ergebnis |
|---|---|
| 3.1.a | 1 |
| 3.1.b | $\infty$ |

| Aufgabe 3.1 | | Ja | Nein |
|---|---|---|---|
| 3.1.c | Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^3\, e^{-n}$ konvergiert | X | ☐ |
| 3.1.d | Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n^4)^2}{(n+1)^2}$ konvergiert | X | ☐ |
| 3.1.e | Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\ln n}$ konvergiert | ☐ | X |

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 3.2 ein:

| Aufgabe 3.2 | | Ergebnis |
|---|---|---|
| 3.2.a | $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ | $\frac{4}{3}$ |
| 3.2.b | $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ | 4 |

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 4.1 ein:

| Aufgabe 4.1 | | Ergebnis |
|---|---|---|
| 4.1.a | $\int e^x\, \cos(\sqrt{2}\, x)\, dx$ | $\frac{1}{3}\left(e^x \cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\, e^x \sin(\sqrt{2}x)\right) + C$ |
| 4.1.b | $\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}\, \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) + C$ |

## Aufgabe 3 (15 Punkte)

**3.1 (5 Punkte)** Bestimmen Sie Konvergenzradien folgender Potenzreihen und tragen Sie diese in die Tabelle auf Seite 1 ein:

3.1.a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Die Formel von Cauchy-Hadamard ergibt:

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

3.1.b $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-n^2} x^n$

Die Formel von Cauchy-Hadamard ergibt:

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\, e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} \sqrt[n]{n!} = 0\,,$$

da $\sqrt[n]{n!} \leq n$ und $\lim_{n\to\infty} ne^{-n} = 0$.

Sind desweiteren folgende Aussagen wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 1. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

3.1.c

Da

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3\, e^{-n}} = e^{-1} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = e^{-1} < 1\,,$$

konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

3.1.d

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergiert, also konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n^4)^2}{(n+1)^2}\,,$$

weil $\frac{(\cos n^4)^2}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$.

3.1.e

Für $n \geq 2$ gilt

$$\ln n = 2 \ln \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}\,\ln n} \geq \frac{1}{2n}\,.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, so divergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\ln n}\,.$$

**3.2 (4 Punkte)** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte und tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

3.2.a $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ .

Nach der Regel von l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+2x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{4}{3}\,.$$

3.2.b $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ .

Zweifache Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 3\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 9\cos 3x}{2} = 4\,.$$

**3.3 (6 Punkte)** Die Kurve $\gamma$ sei gegeben durch

$$y(x) = \sqrt{1-x^2}\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

3.3.a (1P) Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma$.

Aus

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

folgt für die Länger von $\gamma$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

3.3.b (1P) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Figur, die von der Kurve $\gamma$ und den Achsen $x = 0$ sowie $y = 0$ begrenzt wird.

Der Flächeninhalt ist gegeben durch

$$P = \int_0^1 y(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Mit der Substitution $x = \sin t$ erhalten wir

$$P = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{t+\sin t\cos t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

3.3.c (1P) Bestimmen Sie die Oberfläche des Körpers, der durch Drehung der Kurve $\gamma$ um die $x-$Achse entsteht.

Für die Oberfläche gilt

$$O = 2\pi \int_0^1 y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = 2\pi \int_0^1 dx = 2\pi\,.$$

3.3.d (1P) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der durch Drehung der Kurve $\gamma$ um die $x-$Achse entsteht.

$$V = \pi \int_0^1 y^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2\pi}{3}\,.$$

3.3.e (2P) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Figur, die von der Kurve $\gamma$ und den Achsen $x = 0$ sowie $y = 0$ begrenzt wird.

Es sei $S = (x_0, y_0)$ der Schwerpunkt der Figur. Da die Volumen der Körper, die durch Drehung der Kurve $\gamma$ um die $x-$ bzw. $y-$Achse gleich sind, folgt aus der zweiten Guldinschen Regel, dass

$$x_0 = y_0 = \frac{V}{2\pi P} = \frac{4}{3\pi}\,.$$

## Aufgabe 4 (15 Punkte)

**4.1 (4 Punkte)** Bestimmen Sie folgende Integrale und tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

4.1.a $\int e^x \cos(\sqrt{2}\,x)\,dx.$

Zweifache partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(\sqrt{2}\,x)\,dx &= e^x\cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\int e^x \cos(\sqrt{2}\,x)\,dx + C \\ &= e^x\cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\,e^x\sin(\sqrt{2}x) - 2\int e^x \cos(\sqrt{2}\,x)\,dx + C\,.\end{aligned}$$

Daraus foglt

$$\int e^x \cos(\sqrt{2}\,x)\,dx = \frac{1}{3}\left(e^x\cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\,e^x\sin(\sqrt{2}x)\right) + C\,.$$

4.1.b $\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$

Da

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,,$$

verwenden wir die subtituttion $\sqrt{\frac{4}{3}}\,\left(x+\frac{1}{2}\right) = t$. So bekommen wir

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) + C\,.$$

**4.2 (6 Punkte)**

4.1.a (3P) Untersuchen Sie die Funktion

$$u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

auf lokale Extremwerte.

Gleichungen für die kritischen Punkte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0\,,\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 3y^2 - 3x = 0\,.\end{aligned}$$

Zwei Lösungen:

$$P_1 = (1,1), \quad P_2 = (0,0)\,.$$

Die zweiten partiellen Ableitungen von $f$ sind durch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -3$$

gegeben. Für die Hesse-Matrix $H(x,y)$ erhalten wir

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Die Spur und die Determinante der Matrix

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

sind positiv. Also sind auch beide Eigenwerte von $H(1,1)$ positiv und damit nimmt die Funktion $u$ im Punkt $P_1 = (1,1)$ ein lokales Minimum an.

Die Matrix

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte 3 und $-3$, also nimmt die Funktion $u$ im Punkt $P_2 = (0,0)$ keinen Extremwert an.

4.1.b (3P) Entwicklen Sie die Funktion

$$u(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

im Punkt $(1,-2)$ in eine Taylorsumme bis zur Ordnung $o(\|h\|^2)$.

Für die partiellen Ableitungen von $u$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 4x - y - 6, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x - 2y - 3,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 4, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2,\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -1\,.\end{aligned}$$

Da die ersten partiellen Ableitungen im Punkt $(1, -2)$ gleich Null sind, folgt aus dem Satz von Taylor, dass

$$u(x, y) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2 + r_2(x, y)\,.$$

**4.3 (5 Punkte)** Finden Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$v(x, y, z) = x - 2y + 2z\,, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

mit der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Wir verwenden die Methode der Lagrange-Faktoren und definieren die Funktion $L(x, y, \lambda)$ durch

$$L(x, y, \lambda) = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\,.$$

Gleichungen für die kritischen Punkte:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - 2\lambda x = 0\,,\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= -2 - 2\lambda y = 0\,,\\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 2 - 2\lambda z = 0\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$x = \frac{1}{2\lambda}\,, \quad y = -\frac{1}{\lambda}\,, \quad z = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Nebenbedingung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\frac{3}{2}\,.$$

Wir haben also zwei kritischen Punkte:

$$P_1 = \left(-\frac{1}{3}\,, \frac{2}{3}\,, -\frac{2}{3}\right)\,, \quad P_2 = \left(\frac{1}{3}\,, -\frac{2}{3}\,, \frac{2}{3}\right)\,.$$