Prüfung HM 1

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

4.9.2006

Name	**Vorname**	**Matr.-nummer**	**Gruppe**

Saal	**Reihe**	**Platz**

Anmerkungen zur Korrektur:

1.1	1.2	1.3	**Aufgabe 1**	2.1	2.2	2.3	**Aufgabe 2**

1	2			Summe	Note

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.1 ein:

Aufgabe 1.1		Ergebnis
1.1.a	$\ln \frac{1}{1+i}$	$\ln(\frac{2}{\sqrt{2}}) + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$
1.1.b	$\sin(i) - i\,\cos(i)$	$-\frac{i}{e} = e^{\frac{3\pi i}{2} - 1}$
1.1.c	$\arg(z_1\,z_2) + \arg(\frac{z_1}{z_2}),\ z_1, z_2 \neq 0$	$2\arg(z_1)$
1.1.d	$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}$	$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$
1.1.e	$(-\pi)^i$	$\pi^i\, e^{-\pi(2k+1)}, k = 0, \pm 1, \cdots$

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 2.1 ein:

Aufgabe 2.1		Ja	Nein
2.1.a	A ist invertierbar	x	☐
2.1.b	A und B kommutieren	☐	x
2.1.c	A ist diagonalisierbar	x	☐
2.1.d	B ist orthogonal	☐	x
2.1.e	Der Rang der Matrix B ist gleich 2	☐	x

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 2.2 ein:

Aufgabe 2.2		Ergebnis
2.2.a	$\det B$	-2
2.2.b	$\mathrm{Tr}([A, B^{-1}])$	0
2.2.c	$\det((AB)^T) - \det(B^T\,A)$	0
2.2.d	$\mathrm{Tr}(BAB^{-1})$	4
2.2.e	$\mathrm{Tr}(B^T B^{-1})$	3

Aufgabe 1 (10 Punkte)

1.1 (5 Punkte) Es sei i die komplexe Einheit. Bestimmen Sie alle Werte folgender komplexen Größen und tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.1.a	$\ln \frac{1}{1+i}$
1.1.b	$\sin(i) - i\cos(i)$
1.1.c	$\arg(z_1 z_2) + \arg(\frac{z_1}{z_2}), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1, z_2 \neq 0$
1.1.d	$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-1}$
1.1.e	$(-\pi)^i$

1.2 (5 Punkte) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge von Zahlen

$$f_1 := 2, \quad f_2 := 1 \quad \text{sowie} \quad f_n := f_{n-1} + 6f_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

a) Zeigen Sie, daß

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad B_n = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Lösung: Wir beweisen die Formel rekursiv:

Für $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} = B_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{3-2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \tilde{B},$$

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} = \tilde{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

Für $n = 4$:

$$\begin{pmatrix} f_4 \\ f_3 \end{pmatrix} = B_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B} \cdot \tilde{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B} \begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Für $n = 5$:

$$\begin{pmatrix} f_5 \\ f_4 \end{pmatrix} = B_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B} \cdot \tilde{B}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B} \begin{pmatrix} f_4 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Also, i.a. für beliebige n *gilt*

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B} \cdot \tilde{B}^{n-3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tilde{B} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix}$$

q.e.d.

b) Berechnen Sie B_n explizit und beweisen Sie damit, daß

$$f_n = 3^{n-1} + (-2)^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

Lösung: In allgemein, die Potenzieren einer Matrix $\tilde{B}$ *zu* $B_n = \tilde{B}^{n-2}$ *erfolgt durch Diagonalisieren der Matrix* $\tilde{B}$*:*

$$\tilde{B} = X^{-1}\, diag(\lambda)\, X$$

und Potentieren der diagonal Matrix aus der Eigenwerte λ*, d.h.:*

$$B_n = \tilde{B}^{n-2} = X^{-1}\, diag(\lambda^{n-2})\, X.$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1 (5 Punkte) Sind folgende Aussagen wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 2. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

2.1.a Die Matrix A ist invertierbar.

$Ja, denn \quad \det(A) \neq 0$

2.1.b Die Matrizen A und B kommutieren.

$Nein, denn \quad AB \neq BA$

2.1.c Die Matrix A ist diagonalisierbar.

Ja, denn die algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte gleich sind, d.h.
$\tau(\lambda_1 = \lambda_2) = \nu(\lambda_1 = \lambda_2) = 2 \quad und \quad \tau(\lambda_3) = \nu(\lambda_3) = 1$

2.1.d Die Matrix B ist orthogonal.

Nein, denn die Länge der Spalten Vektoren nicht 1 ist (sondern $\sqrt{2}$)

2.1.e Der Rang der Matrix B ist gleich 2.

Nein, denn $\det(B) = -2 \neq 0$ *weil die Zeilen und Spalten sind jeweils linear unabhängig* $\Rightarrow$ *B hat vollen Rang, d.h. Rg(B) = 3.*

2.2 (5 Punkte) Es seien A und B die beiden oben gegebenen Matrizen. Bestimmen Sie folgende Größen und tragen Sie diese in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

2.2.a $\det B = 0 - 1 - 1 = -2$

2.2.b $\mathrm{Tr}([A, B^{-1}]) = 0, \quad denn$

$\mathrm{Tr}([A, B^{-1}]) = \mathrm{Tr}(A\,B^{-1} - B^{-1}\,A) = \mathrm{Tr}(A\,B^{-1}) - \mathrm{Tr}(B^{-1}\,A)$
$= \mathrm{Tr}(A\,B^{-1}) - \mathrm{Tr}(A\,B^{-1}) = 0$

2.2.c $\det((AB)^T) - \det(B^T A) = 0, \quad denn$

$\det((AB)^T) = \det(B^T A^T) = \det(B^T)\,\det(A^T) = \det(B^T)\,\det(A) = \det(B^T A)$

2.2.d $\mathrm{Tr}(BAB^{-1}) = 4, \quad denn$

$\mathrm{Tr}(BAB^{-1}) = \mathrm{Tr}(B^{-1}BA) = \mathrm{Tr}(A) = 4, \quad da \quad B^{-1} \quad invertierbar$

2.2.e $\mathrm{Tr}(B^T B^{-1}) = 3, \quad denn$

$B^T B^{-1} = BB^{-1} = \mathbb{I}, \quad weil \quad B \quad symmetrisch, d.h. \quad B^T = B.$

2.3 (5 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte der oben gegebenen Matrix B und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheit. Besitzt B eine orthonomierte Basis von Eigenvektoren? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

Lösung: Die Eigenwerte der Matrix B erhalten wir als Lösungen der charakteristischen Gleihung von B:

$$det(B - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

Also: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$. Die Matrix B besitzt drei verschiedene Eigenwerte. Deshalb ist deren algebraische Vielfachheit $\tau(\lambda_i) = 1$, $i = 1,2,3$. Da die geometrische Vielfachheit $\nu(\lambda_i)$ die algebraische nicht übersteigt, ist diese ebenfalls 1, d.h. $\nu(\lambda_i) = 1$, $i = 1,2,3$.

Als Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystem: $(B - \lambda_i\mathbb{I})\mathbf{x} = 0$ erhalten wir die Eigenvektoren:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

B besitzt eine orthonomierte Basis von Eigenvektoren (ONB), erhalten durch Normierung der Eigenvektoren $\mathbf{x} \neq 0$. Die ONB als Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist den zu λ_i gehörenden Eigenraum von B :

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.4 (5 Punkte) Gegeben sei ein reeller Parameter t und die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (t-1)^2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie mit Hilfe einer geeigneten Fallunterscheidung die Lösbarkeit in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems

$$A(t)\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems. Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

Lösung: Die lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (t-1)^2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

ist eindeutig lösbar, falls $det(A(t)) \neq 0$.

Also, $det(A(t)) = 1 \cdot 2 \cdot t + 0 = 2t$, *d.h. falls* $t \neq 0$ *ist die Gleichungssystem für alle* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *eindeutig lösbar und*

$$\mathbf{x} = A^{-1}(t)\mathbf{y}, \quad A^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(t-1)^2/t \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & -1 + \frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 1/t \end{pmatrix}.$$

Für $t = 0$ *geht die Gleichungssystem in*

$$A(t=0)\,\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad A(t=0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über. Der Rang $r = Rg(A(t=0)) = 2$ *und bei* $n = 3$ *Variablen* $x_i \in \mathbb{R}^3$, *es gibt also* $n - r = 1$ *frei wälbare Parameter* $\mu \in \mathbb{R}$ *denen einer Lösungsbedingung an* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ *entspricht, nämlich* $y_3 = \mu$. *Somit erhalten wir die Lösung wie folgt*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - \mu \\ \frac{y_1+y_2}{2} + \mu \\ \mu \end{pmatrix}.$$