

Blatt 11

Vortragsübungen

Aufgabe 36 Berechnen Sie folgende komplexe Zahlen.

$$z_1 := \frac{3}{2+i} \quad z_2 := \frac{2-i}{1+i} \quad z_3 := \frac{\overline{(2+3i)} \cdot (1+i) + 2}{(2-i)^2 \cdot (2+i)} \quad z_4 := e^{\ln(2)+i\frac{\pi}{2}}$$

Nähern Sie außerdem z_4 mittels Teilsummen der Exponentialreihe schrittweise an.

Aufgabe 37 Seien $z, w \in \mathbf{C}$.

- (1) Zeigen Sie, dass $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$ ist.
- (2) Zeigen Sie, dass $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ ist.

Aufgabe 38 Sei $z \in \mathbf{C}$ mit $|z| < 1$.

- (1) Warum ist $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$?
- (2) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ ist.
- (3) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^k$.

Aufgabe 39 Skizzieren Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene.

- (1) $M_1 := \{z \in \mathbf{C} : 0 < \operatorname{Im}(iz) < 1\}$
- (2) $M_2 := \{z \in \mathbf{C} : z = \bar{z}\}$
- (3) $M_3 := \{z \in \mathbf{C} : z = -\bar{z}\}$
- (4) $M_4 := \{z \in \mathbf{C} : |z - (1+i)| = |z - 2i|\}$
- (5) $M_5 := \{z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}(z)\}$
- (6) $M_6 := \{z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} : \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Im}(z)\}$
- (7) $M_7 := M_5 \cap M_6$