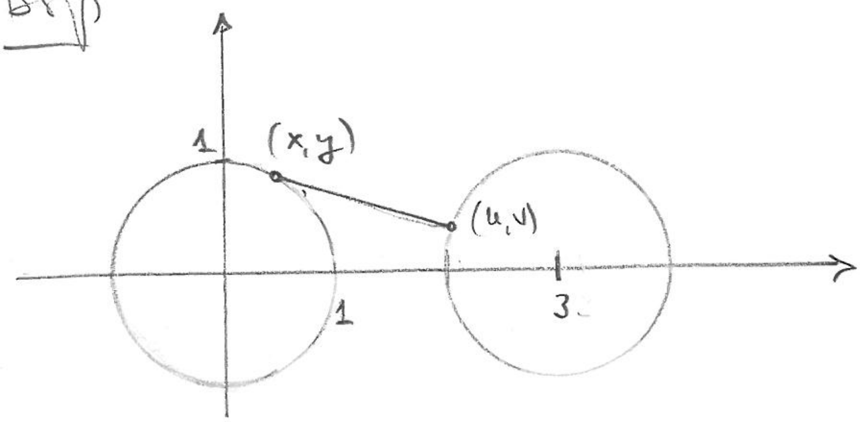
Bsp




Abstand = Min / Max !

$\iff$ Abstand$^2$ = Min / Max !

$f(x,y,u,v) := (x-u)^2 + (y-v)^2 =$ Extr. !

$g_1(x,y,u,v) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ } Punkt auf

$g_2(x,y,u,v) := (u-3)^2 + v^2 - 1 = 0$ } jeweiligem Kreis !

---

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,u,v) = \rho_1 \nabla g_1(x,y,u,v) + \rho_2 \nabla g_2(x,y,u,v) \\ g_1(x,y,u,v) = 0 \\ g_2(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2(x-u) = \rho_1 \cdot 2x \\ 2(y-v) = \rho_1 \cdot 2y \\ -2(x-u) = \rho_2 \cdot 2(u-3) \\ -2(y-v) = \rho_2 \cdot 2v \\ x^2+y^2 = 1 \\ (u-3)^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

- $(x, y, u, v) = (1, 0, 2, 0)$
ist nach Anschauung eine Minimalstelle.

Nach Rechnung:

$$\begin{cases} -2 = \rho_1 \cdot 2 & \Rightarrow \rho_1 = -1 \\ 0 = 0 & \\ 2 = \rho_2 \cdot (-2) & \Rightarrow \rho_2 = -1 \\ 0 = 0 & \\ 1^2 + 0^2 = 1 & \\ (-1)^2 + 0^2 = 1 & \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Flachstelle unter NB $(g_1, g_2) = 0$

$$N(1, 0, 2, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ Basis $\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{0} \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$F(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + x^2+y^2-1$$
$$+ (u-3)^2 + v^2 - 1$$

$$\Rightarrow H_F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u^t H_F(1,0,2,0)\, u = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

positiv definit

$\Rightarrow (1,0,2,0)$ lokales Minimum von $f$

unter Nb $(g_1, g_2) = 0$.

- $(x,y,u,v) = (-1,0,2,0)$

scheint nach Anschauung

weder Minimal- noch

Maximalstelle zu sein.

Nach Rechnung:

$$\begin{cases} -6 = \rho_1 \cdot (-2) & \Rightarrow \rho_1 = 3 \\ 0 = 0 & \\ 6 = \rho_2 \cdot (-2) & \Rightarrow \rho_2 = -3 \\ 0 = 0 & \\ (-1)^2 + 0^2 = 1 & \\ (-1)^2 + 0^2 = 1 & \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Flachstelle unter Nb $(g_1, g_2) = 0$

$$N(-1,0,2,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

wie oben $\rightsquigarrow$ $$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2 - 3(x^2+y^2-1) + 3\left((u-3)^2 + v^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad H_F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U^t H_F(-1,0,2,0)\, U = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & +8 \end{pmatrix}$$

nicht pos. def.

nicht neg. def.

Determinante: $-36 \neq 0$

Also ist $(-1,0,2,0)$ ein Sattelpunkt von $f$ unter NB $(g_1, g_2) = 0$.