Einführung Mathematik

Woher kommt das Wort "Mathematik"?

Es bedeutet "$\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$" (mathema): "das Gelernte".

Das Gelernte ist das Abstrahierte, das erkannte Muster und der Umgang mit ihm.

Ohne Abstraktion wird man laufend von der Wirklichkeit überrascht.

Was ist Mathematik?

Mathematik ist die Naturwissenschaft der elementaren Dinge: Zahlen und Formen.

Zu einem vorliegenden Sachverhalt wird ein Modell erstellt: eine formale Konstruktion oder ein axiomatischer Rahmen. Auch Theorie genannt, von "$\theta\varepsilon\omega\rho\acute{\varepsilon}\varepsilon\iota\nu$": "beobachten". Man erstellt eine Theorie auf der Grundlage von Beobachtungen.

Mathematik beginnt es zu sein, sobald in dem Modell selbst gerechnet und argumentiert werden kann, auch ohne Bezug zum Sachverhalt. Man kann $2 \cdot 3$ im dazu konstruierten Ring $\mathbb{Z}$ ausrechnen, ohne zu benötigen, daß es sich um 2 Reihen aus 3 Steinen handelt. Man kann $a \cdot b = b \cdot a$ in $\mathbb{Z}$ zeigen, ohne dazu mit Steinen ein Rechteck auszulegen und es von zwei Seiten zu betrachten.

Die mathematische Modellbildung kann sich durch mehrere Ebenen iterieren. Zunächst werden Gerade, Ebene, Raum zu $\mathbb{R}^n$ abstrahiert. Dann $\mathbb{R}^n$ zum Vektorraum. Dann die Vektorräume zur abelschen Kategorie. Dann die abelschen Kategorien zur 2-Kategorie (mit welchen Eigenschaften?).

Eine solche Modellbildung ist umso besser motiviert, je größer der Effizienzgewinn ist. Oft können mehrere Sachverhalte mit einem abstrakten Modell beschrieben werden, und aus dem Modell können für die Sachverhalte Schlußfolgerungen gezogen werden.

Zu meinen, daß man für einen bestimmten Sachverhalt ein zuverlässig funktionierendes Modell hat, wird als sicheres Verständnis des Sachverhalts empfunden.

Im Gegensatz zur Physik?

Auch in der Physik werden für reale Sachverhalte Modelle erstellt, in welchen gerechnet und argumentiert wird. Klar trennen lassen sich Mathematik und Physik nicht.

Mathematiker interessieren sich auch für Dinge, die Physikern zu einfach sind. Wie zum Beispiel Primzahlen. Oder Kreise. Oder Polynome.

Ab einer gewissen Ebene der iterierten Modellbildung überläßt ein Physiker diese der Mathematik und erkundigt sich bei Bedarf nach verfügbaren Techniken. Wie Einstein bei Grossmann.

Was ist Wirklichkeit ?

Bei einer guten Modellbildung können sich auf der Modellebene Wirkungen entfalten. Das gilt nicht nur in der Mathematik, das gilt auch in der Naturwissenschaft allgemein, wie der Physik und der Chemie. Um einmal Serres Beispiele zu zitieren :

Zahlen haben Eigenschaften, die man einem Haufen Steine nicht unmittelbar ansieht.

Licht hat Eigenschaften, die man einer Lampe nicht unmittelbar ansieht. Hier gibt es zwei sich ergänzende Modelle: Wellen und Teilchen.

Wassermoleküle haben Eigenschaften, die man einem Glas Wasser nicht unmittelbar ansieht.

Sind nun die abstrakten Elemente des Rings $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen wirklich, oder sind es nur die besagten Steine? Wirklich ist, was Wirkung entfalten kann. Steine kann man werfen. Mit ganzen Zahlen kann man multiplizieren.

Was macht ein Mathematiker ?

Es gibt drei Tätigkeitsbereiche, die sich überlappen und bedingen.

(1) Die Modellbildung, die Abstraktion also.

Das Erstellen von Modellen, die zum einen in der zu untersuchenden Ebene erkannte Muster modellieren und die zum anderen erlauben, im Modell selbst zwingend zu argumentieren, mit Sätzen und Beweisen, unter deren Zuhilfenahme dann im Modell gerechnet werden kann.

Wobei sich oft erst im weiteren Verlauf herausstellt, inwieweit im Modell selbst argumentiert werden kann. So glaubten Eilenberg und Mac Lane, es werde genau einen Artikel zu Kategorien, Funktoren und Transformationen geben, nämlich ihren ersten. Damit sei alles gesagt, denn auf dieser Ebene könne sonst nichts mehr passieren. Dann erst definierte Kan darin die adjungierten Funktoren.

(2) Das Argumentieren und Rechnen im Modell.

Mit anderen Worten, Sätze aufstellen und beweisen. Und mit deren Hilfe rechnen.

Dies sollte nun im Modell selbst vonstatten gehen können, ohne verwenden zu müssen, von welcher Ebene man ursprünglich kam.

Im Rahmen der Vektorräume kann man die Existenz einer Basis nachweisen. Man ist also nicht darauf angewiesen, mit $\mathbb{R}^n$ hantieren zu dürfen.

Im Rahmen der abelschen Kategorien kann man das Schlangenlemma nachweisen. Man ist also nicht darauf angewiesen, mit Elementen aus Moduln hantieren zu dürfen.

(3) Das Anwenden des Modells auf eine konkretere Ebene.

Dies kann geschehen auf eine Ebene, die Ausgangspunkt der Abstraktion war. Also die Nichtauflösbarkeit der symmetrischen Gruppe S_5 dazu zu verwenden, zu erkennen, daß Polynomgleichungen 5-ten Grades keine Lösungsformel einer bestimmten Art haben können.

Aber auch auf Ebenen, die nicht von vorneherein eingeplant waren. So etwa operiert die Lorentz-Gruppe auf dem Minkowski-Raum, wenn auch bei der Erstellung der Gruppentheorie eine Anwendung auf die Elektrodynamik bewegter Körper nicht im Plan war.

Auch hatte Riemann nicht die Gravitationstheorie als Anwendung vorgesehen.

Künstler oder Handwerker ?

Mathematik zu betreiben ist Handwerk, in allen drei beschriebenen Bereichen.

Im Bereich (1) kann das Wahrnehmen und Ausdrücken der Wirklichkeit auch als künstlerische Tätigkeit verstanden werden. Die Randbedingung, daß das erstellte Modell auch zum Laufen gebracht werden sollte, setzt hier den Ambitionen aber Grenzen.

Im Bereich (2) ist Eleganz gern ein Zeichen von Effizienz, was den Eindruck von Kunsthandwerk hervorrufen kann.

Ein im Bereich (3) besonders erfolgreiches Modell hinterläßt eher den Eindruck eines Orakels denn eines Kunstwerks.

Ein funktionierendes mathematisches Modell wird schließlich als Teil der Wirklichkeit wahrgenommen. Es mußte einst zwar handwerklich erstellt werden, ist dann aber einfach vorhanden. Ein Bauwerk, das zur Landschaft paßt wie eine Treppe oder eine Brücke. Man kann (2) darauf laufen, man kann (1) weitere Bauwerke darauf aufbauen, man kann (3) es verwenden, um ein gewünschtes Ziel zu erreichen.

Entdeckung oder Erfindung ?

Ein Muster zu erkennen, das zuverlässig auftritt, ist eine Entdeckung. Die Muster, die Anlaß zur Modellbildung geben, hat der Mathematiker also zu entdecken.

Das Modell hat er so zu konstruieren, daß es funktioniert, daß es also zum Muster paßt und daß in ihm argumentiert und gerechnet werden kann – er hat es zu erfinden.

So etwa erfand Dedekind für die reellen Zahlen die Dedekindschen Schnitte. Kollegen von ihm erfanden die Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen. Andere Kollegen erfanden einen axiomatischen Zugang zum vollständig geordneten Körper der reellen Zahlen. Man hat entdeckt, daß zwischen diesen Modellen Brücken gebaut werden können, Isomorphismen genannt.

Im Verlauf des Erfindens kann man entdecken, daß eine Konstruktion funktioniert, eine andere nicht.

Umgekehrt kann man beim Entdecken oft vorher gemachte Erfindungen als Werkzeuge einsetzen.

Dieses Wechselspiel ist nicht auf die Mathematik beschränkt: Die Lichtbrechung wurde entdeckt, das Fernrohr wurde erfunden, die Planetengesetze wurden entdeckt, die Newtonsche Dynamik wurde erfunden.

Man muß bereit sein, zu schauen und zu schrauben.

Stuttgart, Februar 2023, Matthias Künzer