Klausur zur Schulmathematik

vom höheren Standpunkt

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- **Antworten sind zu begründen.** Nachvollziehbare Rechnungen zählen als Begründungen.
- Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **07.04.2023** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **07.04.2023** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (1+4+1 Punkte) Sei $f(X) = X^3 + 7X - 6\mathrm{i} \in \mathbb{C}[X]$.

(1) Bestimmen Sie die Diskriminante $\Delta(f(X))$ von $f(X)$ ohne Verwendung seiner Nullstellen.

(2) Berechnen Sie $f(\mathrm{i})$ und $f(2\mathrm{i})$. Bestimmen Sie nun die Nullstellen des Polynoms $f(X)$ in $\mathbb{C}$.

(3) Verwenden Sie die Nullstellen von $f(X)$, um die Diskriminante $\Delta(f(X))$ abermals zu berechnen.

Aufgabe 2 (1+2 Punkte) Sei $f(X) = X^4 - 3X^2 + 6X - 8 \in \mathbb{C}[X]$.

(1) Bestimmen Sie ein Polynom $u(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit $f(X) = (X^2 - 1)^2 - u(X)^2$.

(2) Bestimmen Sie eine Nullstelle des Polynoms $f(X)$ in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Bestimmen Sie den Wert des Kettenbruchs $[\,2, \overline{4}\,]$.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Gibt es $a,\ b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ mit $\pi = [\,\overline{a, b}\,]$?

Aufgabe 5 (2+1+2 Punkte)

Sei $w := \sqrt[3]{5}$.

(1) Zeigen Sie: Es ist $X^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel.

(2) Zeigen Sie: Es ist $\mu_w(X) = X^3 - 5$.

(3) Zeigen Sie: Es ist $\mu_{w+1}(X) = (X-1)^3 - 5$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Stellen Sie das symmetrische Polynom $X_1^5 + X_2^5 \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1 = s_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ und $s_2 = s_2(X_1, X_2) = X_1 X_2$ dar.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Wir wissen: e ist transzendent. Verwenden Sie dies, um zu zeigen: Es ist $\frac{1}{\mathrm{e}}$ transzendent.

Aufgabe 8 (2+2 Punkte)

Sei ein Dreieck mit den Seiten a, b und c gegeben. Sein Flächeninhalt sei A.

Sei dabei $b = c$. Sei das Dreieck also gleichschenklig.

(1) Zeigen Sie mit der Heronschen Formel: Es ist $A = \frac{1}{4} a \sqrt{4b^2 - a^2}$.

(2) Bestätigen Sie die Formel für A aus (1) unter Verwendung der Höhe auf der Grundseite a.
