

**Blatt 6**

## Platzaufgaben

**Platzaufgabe 17** Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke in  $\mathbb{C}$ .

(a)  $(2 + 4i) + (6 - 7i)$

(b)  $(1 + i)(1 - i)$

(c)  $\frac{1}{1 - i}$

(d)  $\frac{2}{1 - 4i} + \frac{2}{4 - i}$

**Platzaufgabe 18**

(a) Gilt  $1 + 1 = 0$  in  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ?

Gilt  $1 + 1 = 0$  in  $\mathbb{F}_4$ ?

(b) Bestimmen Sie die Multiplikationstabellen für  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  und für  $\mathbb{F}_4$ .

Wie kann man an diesen Tabellen erkennen, welcher der beiden kommutativen Ringe ein Körper ist?

(c) Berechnen Sie  $(1 + \alpha)^2 + \alpha + \frac{1}{\alpha}$  in  $\mathbb{F}_4$ .

(d) Berechnen Sie  $\frac{(1 + \beta)^2}{\beta} + \beta^2$  in  $\mathbb{F}_8$ .

**Platzaufgabe 19**

(a) Berechnen Sie  $(1 + \iota)(1 - \iota)$  in  $\mathbb{F}_9$ .

(b) Berechnen Sie  $\frac{1}{1 - \iota}$  in  $\mathbb{F}_9$ .

(c) Seien

$$f(X) := X^3 - X^2 - 1$$

$$g(X) := X^2 + \iota X + (-1 + \iota)$$

in  $\mathbb{F}_9[X]$  gegeben. Bestimmen Sie  $h(X) \in \mathbb{F}_9[X]$  so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X)$$

ist.

Bestimmen Sie ein  $a \in \mathbb{F}_3$  mit  $f(a) = 0$ . Bestimmen Sie ein  $b \in \mathbb{F}_9 \setminus \mathbb{F}_3$  mit  $f(b) = 0$ .

**Blatt 6**

## Hausaufgaben

**Hausaufgabe 21**

(a) Berechnen Sie  $\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{5}\right) \frac{(4 + 12i)i}{3 - 2i} + \frac{1}{2 + i}$  in  $\mathbb{C}$ .

(b) Seien

$$f(X) := X^4 - (1 + 2i)X^3 + (-1 + 2i)X^2 + (8 - 5i)X + 5$$

$$g(X) := iX + (2 - i)$$

in  $\mathbb{C}[X]$  gegeben. Bestimmen Sie  $h(X), r(X) \in \mathbb{C}[X]$  mit  $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$  so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.

**Hausaufgabe 22** Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind.(a) Seien  $x, y \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ . Es gilt  $(x + y)^3 = x^3 + y^3$  in  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ .(b) Seien  $x, y \in \mathbb{F}_9$ . Es gilt  $(x + y)^3 = x^3 + y^3$  in  $\mathbb{F}_9$ .(c) Ist  $x \in \mathbb{F}_9$  mit  $x^3 = 1$ , so ist  $x = 1$ .(d)  $X^6 + 1$  ist irreduzibel in  $\mathbb{F}_9[X]$ .**Hausaufgabe 23** Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a)  $A := \{x \in \mathbb{F}_4 : x^2 + x + 1 = 0\}$

(b)  $B := \{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + x + 1 = 0\}$

(c)  $C := \{x \in \mathbb{F}_8 : x^2 + x + \beta = 0\}$

(d)  $D := \{x \in \mathbb{F}_9 : x^3 = x\}$

**Hausaufgabe 24**

(a) Berechnen Sie  $\left(\frac{1}{1 + \beta^2} + \beta^2\right)^5$  in  $\mathbb{F}_8$ .

(b) Seien

$$f(X) := (1 + \beta^2)X^5 + (1 + \beta^2)X^2 + (1 + \beta + \beta^2)X + \beta$$

$$g(X) := X^2 + \beta$$

in  $\mathbb{F}_8[X]$  gegeben. Bestimmen Sie  $h(X), r(X) \in \mathbb{F}_8[X]$  mit  $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$  so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.