

Blatt 5

Platzaufgaben

Platzaufgabe 14 Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.Geben Sie dabei Ihre Lösungen in der Form $[a]_n$ mit $0 \leq a \leq n - 1$ an.

(a) $[1]_2 + [1]_2$

(b) $[2]_3 \cdot [2]_3$

(c) $[11]_4 \cdot ([6]_4 - [123]_4)$

(d) $[4]_5 \cdot ([2]_5)^{-1}$

(e) $[2]_6 \cdot ([5]_6 - [8]_6)$

Platzaufgabe 15 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

Wir machen von der Konvention Gebrauch, die eckigen Klammern weglassen zu dürfen.

(a) $A := \{x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \text{ mit } y \cdot 2 = x\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} : x \cdot 3 = 3\}$

(c) $C := \{x \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} : x \cdot 5 = 7\}$

(d) $D := \{x^5 : x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$

Platzaufgabe 16

(a) Seien

$$f(X) := 4X^4 - 6X^3 + X^2 - 6X + 6$$

$$g(X) := X^2 + X - 5$$

in $\mathbb{Q}[X]$ gegeben.Bestimmen Sie $h(X), r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.

(b) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $\deg(f(X)) \leq 3$.

Blatt 5

Hausaufgaben

Hausaufgabe 17 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

- (a) $A := \{(a, b) \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} : a \cdot b = 1\}$
 (b) $B := \{(a, b) \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} : a \cdot b = 1\}$
 (c) $C := \{(a, b) \in ((\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \setminus \{0\}) \times ((\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}) \setminus \{0\}) : a \cdot b = 0\}$
 (d) $D := \{(a, b) \in ((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \setminus \{0\}) \times ((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \setminus \{0\}) : a \cdot b = 0\}$

Hausaufgabe 18 Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

- (a) $A := \{x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} : x^2 + x + 1 = 0\}$
 (b) $B := \{x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} : x^2 + x + 1 = 0\}$
 (c) $C := \{x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} : 2x^3 + x^2 + 1 = 0\}$
 (d) $D := \{x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} : 2x^3 + x^2 + 1 = 0\}$

Hausaufgabe 19

- (a) Seien

$$\begin{aligned} f(X) &:= 2X^5 - X^4 + 2X^3 + 5X^2 - X + 10 \\ g(X) &:= X^3 + 2X^2 + X - 3 \end{aligned}$$

in $\mathbb{Q}[X]$ gegeben.Bestimmen Sie $h(X), r(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.

- (b) Seien

$$\begin{aligned} f(X) &:= X^3 + 3X^2 + 1 \\ g(X) &:= 2X^2 + 1 \end{aligned}$$

in $\mathbb{F}_5[X]$ gegeben.Bestimmen Sie $h(X), r(X) \in \mathbb{F}_5[X]$ mit $\deg(r(X)) < \deg(g(X))$ so, dass

$$f(X) = h(X) \cdot g(X) + r(X)$$

ist.

Hausaufgabe 20

- (a) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome $f(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ mit $\deg(f(X)) \leq 2$.
 (b) Entscheiden Sie, ob $X^6 + X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$ irreduzibel ist.