

Ergänzungen zur Höheren Mathematik

Matthias Künzer

Universität Stuttgart

24. Januar 2020

Inhalt

1	Jordanform	4
1.1	Problemstellung	4
1.2	Haupträume	5
1.3	Hauptvektorketten und Jordanbasen	8
2	Newtonverfahren	15
2.1	Problemstellung	15
2.2	Das Newtonverfahren	18
2.3	Das Newtonverfahren höherer Ordnung	24
3	Variationsrechnung	31
3.1	Problemstellung	31
3.2	Eine notwendige Bedingung	34
3.3	Das ganze mit Nebenbedingung	39
3.4	Das ganze parametrisiert	45
4	Krümmungskreise	53
4.1	Problemstellung	53
4.2	Parametrisierte Kurven	54
4.3	Implizit gegebene Kurven	59
A	Aufgaben und Lösungen	64
A.1	Aufgaben	64
A.2	Lösungen	66

Vorwort

Dieses Skript soll die Höhere Mathematik für Ingenieure um Kapitel aus der Wunschliste ergänzen, welche in HM 1/2 aus Zeitgründen nicht unterkommen können.

Vorausgesetzt wird HM 1. Die Veranstaltung kann parallel zu HM 2 besucht werden.

Die Jordanform in §1 ist der Weg, auch nichtdiagonalisierbare Matrizen in die Nähe einer Diagonalform zu bekommen.

Das Newtonverfahren in §2 ist verglichen zur Intervallhalbierung ein oft schnelleres, aber oft auch unsichereres Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion.

In der Variationsrechnung in §3 wird statt nach extremalen Punkten vielmehr nach extremalen Kurven gesucht.

Die Krümmungskreise in §4 stellen eine weitere Anwendung der Analysis auf die Geometrie dar.

Dank geht an ÖMER ATMACA für den Vorschlag einer Fehlerabschätzung in Bemerkung 28 und für Korrekturen.

Stuttgart, Sommer 2019

Matthias Künzer

Kapitel 1

Jordanform

1.1 Problemstellung

Sei $n \geq 1$. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Erinnerung 1 Es ist A genau dann diagonalisierbar, falls es in \mathbb{C}^n eine Basis v_1, v_2, \dots, v_n aus Eigenvektoren von A gibt.

Falls es eine solche Basis gibt, sieht man die Diagonalisierbarkeit wie folgt ein.

Wir schreiben

$$Av_k = \mu_k v_k$$

für $1 \leq k \leq n$. Dann sind μ_1, \dots, μ_n die Eigenwerte von A , wobei jeder Eigenwert mit seiner algebraischen Vielfachheit auftritt.

Sei S die Matrix mit den Spalten v_1, v_2, \dots, v_n . Es ist also $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix.

Es übersetzt sich $Av_k = \mu_k v_k$ dann zu

$$AS = SD,$$

wobei

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$S^{-1}AS = D$$

eine Diagonalmatrix.

Beispiel 2 Nicht alle Matrizen aus $\mathbb{C}^{n \times n}$ sind diagonalisierbar.

Sei z.B. $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ betrachte.

Der einzige Eigenwert von A ist 0, mit algebraischer Vielfachheit 2.

Gäbe es eine Basis v_1, v_2 von \mathbb{C}^2 , die aus Eigenvektoren von A bestünde, dann müßte $Av_1 = 0v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und auch $Av_2 = 0v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein.

Sei $S \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ die Matrix mit Spalten v_1 und v_2 . Es wäre $AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Wegen S invertierbar folgt hieraus aber $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Das ist aber *nicht der Fall*. Also kann A nicht diagonalisierbar sein.

Plan 3 Wir suchen eine Basis v_1, v_2, \dots, v_n von \mathbb{C}^n derart, daß entweder

$$Av_k = \mu_k v_k$$

oder aber

$$Av_k = \mu_k v_k + v_{k-1}$$

ist für $1 \leq k \leq n$ und gewisse $\mu_k \in \mathbb{C}$.

Ist dann $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Matrix mit den Spalten v_1, \dots, v_n , dann wird

$$S^{-1}AS$$

eine Matrix sein mit μ_1, \dots, μ_n auf der Diagonalen, und mit 1 oder 0 an jeder Stelle direkt über der Diagonalen.

Dies läßt sich dann auch noch etwas genauer sagen.

Beispiel 4 Sei wieder $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ wie in Beispiel 2.

Sei $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Dann ist $Av_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_1$.

Ferner ist $Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_2 + v_1$.

Es wird $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ und also

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1.2 Haupträume

Sei $n \geq 1$. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Erinnerung 5 Wir faktorisieren das charakteristische Polynom

$$\chi_A(t) = \det(A - tE_n) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{e_1} \cdot (t - \lambda_2)^{e_2} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_m)^{e_m} ,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A sind und wobei λ_k mit der algebraischen Vielfachheit e_k auftritt für $1 \leq k \leq m$.

Es ist

$$\text{Kern}(A - \lambda_k E_n) = \{ x \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda_k E_n)x = 0 \}$$

der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_k .

Wir kürzen wie folgt ab.

$$A_{(k)} := A - \lambda_k E_n$$

So z.B. ist nun

$$\text{Kern}(A_{(k)}) = \{ x \in \mathbb{C}^n : A_{(k)}x = 0 \}$$

der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_k .

Bemerkung 6 Sei $1 \leq k \leq m$. Es ist

$$\text{Kern}(A_{(k)}) \subseteq \text{Kern}(A_{(k)}^2) \subseteq \text{Kern}(A_{(k)}^3) \subseteq \text{Kern}(A_{(k)}^4) \subseteq \dots$$

Denn für $j \geq 1$ und $x \in \mathbb{C}^n$ mit $A_{(k)}^j x = 0$ ist auch

$$(A_{(k)})^{j+1}x = A_{(k)}(A_{(k)}^j x) = 0.$$

Mit anderen Worten, es ist $\text{Kern}(A_{(k)}^j) \subseteq \text{Kern}(A_{(k)}^{j+1})$.

Satz 7 Es ist $\text{Kern}(A_{(k)}^{e_k}) = \text{Kern}(A_{(k)}^j)$ für $e_k \leq j$.

Ist $\text{Kern}(A_{(k)}^j) = \text{Kern}(A_{(k)}^{j+1})$ für ein $j \geq 1$, dann ist auch $\text{Kern}(A_{(k)}^j) = \text{Kern}(A_{(k)}^\ell)$ für $j \leq \ell$.

Mit anderen Worten, die Kette von Untervektorräumen aus Bemerkung 6 weist spätestens ab $\text{Kern}(A_{(k)}^{e_k})$ nur noch Gleichheiten auf. Und ab der ersten Gleichheit kommen nur noch Gleichheiten.

Definition 8 Sei $1 \leq k \leq m$.

Der *Hauptraum* von A zum Eigenwert λ_k ist definiert als

$$H_A(\lambda_k) := \text{Kern}(A_{(k)}^{e_k}).$$

Ist z.B. die algebraische Vielfachheit e_k gleich 1, so ist $H_A(\lambda_k) = \text{Kern}(A_{(k)})$ der Eigenraum von A zum Eigenwert λ_k .

Bemerkung 9 Es ist $\dim H_A(\lambda_k) = e_k$.

Satz 10 Sei $1 \leq k \leq m$.

Sei $v_{k,1}, v_{k,2}, \dots, v_{k,e_k}$ eine Basis des Hauptraums $H_A(\lambda_k)$.

Aneinandersetzen der Basen der Haupträume gibt eine Basis

$$v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,e_1}, \quad v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,e_2}, \quad \dots \quad v_{m,1}, v_{m,2}, \dots, v_{m,e_m}$$

des gesamten Raums \mathbb{C}^n .

Bemerkung 11 Die in Plan 3 gesuchte Basis werden wir auf die in Satz 10 beschriebene Weise zusammensetzen.

Leider dürfen die Basen der Haupträume nun nicht beliebig gewählt werden. Um im Plan zu bleiben, müssen wir ein Verfahren finden, wie man eine geeignete Basis von $H_A(\lambda_k)$ konstruieren kann für $1 \leq k \leq n$.

Beispiel 12 Sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$.

Es ist $\chi_A(t) = -t^5$.

Also ist $\lambda_1 := 0$ der einzige Eigenwert von A . Somit ist $A_{(1)} = A - 0E_5 = A$.

Es hat $\lambda_1 = 0$ die algebraische Vielfachheit 5. Also ist auch $\dim H_A(\lambda_1) = 5$; vgl. Bemerkung 9.

Es wird $A_{(1)}$ durch Zeilenumformungen und Weglassen von Nullzeilen zu $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Also ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,2}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$.

Es wird $B \cdot A_{(1)}$ durch Zeilenumformungen und Weglassen von Nullzeilen zu $C := (1\ 0\ 0\ 0\ 1)$. Vgl. Aufgabe 1.

Also ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=: x_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{2,2}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(1)}^2)$, die obige Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$ ergänzt.

Es wird $C \cdot A_{(1)} = 0$.

Also ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: x_{3,1}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(1)}^3)$, die obige Basis von $\text{Kern}(A_{(1)}^2)$ ergänzt.

Nun ist $\dim \text{Kern}(A_{(1)}^3) = 5$ erreicht, es ist also bereits $\text{Kern}(A_{(1)}^3) = H_A(\lambda_1)$.

1.3 Hauptvektorketten und Jordanbasen

Sei $n \geq 1$. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Sei $\chi_A(t) = \pm(t - \lambda_1)^{e_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_m)^{e_m}$, wobei die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ paarweise verschieden sind.

Sei $j \in [1, m]$. Wir wollen eine geeignete Basis von $H_A(\lambda_j)$ bestimmen.

Diese geeigneten Basen der Haupträume werden wir gemäß Satz 10 aneinandersetzen, um mit der erhaltenen Basis des Gesamtraums \mathbb{C}^n eine Basis wie in Plan 3 zu erhalten.

Sei

$$x_{1,1}, \dots, x_{1,t_1}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(j)})$.

Wir ergänzen diese zu einer Basis

$$x_{1,1}, \dots, x_{1,t_1}, \quad x_{2,1}, \dots, x_{2,t_2}$$

von $\text{Kern}(A_{(j)}^2)$.

Wir ergänzen diese zu einer Basis

$$x_{1,1}, \dots, x_{1,t_1}, \quad x_{2,1}, \dots, x_{2,t_2}, \quad x_{3,1}, \dots, x_{3,t_3}$$

von $\text{Kern}(A_{(j)}^3)$.

Usf.

Wir erhalten so eine Basis

$$x_{1,1}, \dots, x_{1,t_1}, \quad x_{2,1}, \dots, x_{2,t_2}, \quad x_{3,1}, \dots, x_{3,t_3}, \quad \dots, \quad x_{\ell,1}, \dots, x_{\ell,t_\ell}$$

von $H_A(\lambda_j)$.

Es ist dann $t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_\ell = e_j$. Man weiß auch, daß $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_\ell$ ist.

Wir setzen nun $y_{\ell,1} := x_{\ell,1}$, $y_{\ell,2} := x_{\ell,2}$, \dots , $y_{\ell,u_\ell} := x_{\ell,t_\ell}$. Insbesondere sei $u_\ell := t_\ell$.

Sei dann

$$x_{1,1}, \dots, x_{1,t_1}, \quad \dots, \quad x_{\ell-2,1}, \dots, x_{\ell-2,t_{\ell-2}}, \\ A_{(j)}y_{\ell,1}, \dots, A_{(j)}y_{\ell,t_\ell}$$

mit einer Auswahl

$$\{y_{\ell-1,1}, \dots, y_{\ell-1,u_{\ell-1}}\} \subseteq \{x_{\ell-1,1}, \dots, x_{\ell-1,t_{\ell-1}}\}$$

zu einer Basis

$$x_{1,1}, \dots, x_{1,t_1}, \quad \dots, \quad x_{\ell-2,1}, \dots, x_{\ell-2,t_{\ell-2}}, \\ A_{(j)}y_{\ell,1}, \dots, A_{(j)}y_{\ell,t_\ell}, \quad y_{\ell-1,1}, \dots, y_{\ell-1,u_{\ell-1}}$$

von $\text{Kern}(A_{(j)}^{\ell-1})$ ergänzt.

Sei dann

$$x_{1,1}, \dots, x_{1,t_1}, \dots, x_{\ell-2,1}, \dots, x_{\ell-3,t_{\ell-3}}, \\ A_{(j)}^2 y_{\ell,1}, \dots, A_{(j)}^2 y_{\ell,t_\ell}, A_{(j)} y_{\ell-1,1}, \dots, A_{(j)} y_{\ell-1,u_{\ell-1}}$$

mit einer Auswahl

$$\{y_{\ell-2,1}, \dots, y_{\ell-2,u_{\ell-2}}\} \subseteq \{x_{\ell-2,1}, \dots, x_{\ell-2,t_{\ell-2}}\}$$

zu einer Basis

$$x_{1,1}, \dots, x_{1,t_1}, \dots, x_{\ell-2,1}, \dots, x_{\ell-2,t_{\ell-2}}, \\ A_{(j)}^2 y_{\ell,1}, \dots, A_{(j)}^2 y_{\ell,t_\ell}, A_{(j)} y_{\ell-1,1}, \dots, A_{(j)} y_{\ell-1,u_{\ell-1}}, y_{\ell-2,1}, \dots, y_{\ell-2,u_{\ell-2}}$$

von $\text{Kern}(A_{(j)}^{\ell-2})$ ergänzt.

Usf.

Definition 13 Eine wie eben beschrieben zustandengekommene Kette von Vektoren

$$A_{(j)}^{s-1} y_{s,j}, A_{(j)}^{s-2} y_{s,j}, \dots, A_{(j)}^1 y_{s,j}, A_{(j)}^0 y_{s,j}$$

heißt eine *Hauptvektorkette* von A zum Eigenwert λ_k .

Satz 14 Die aus dem vorstehenden Verfahren resultierenden Hauptvektorketten für den Eigenwert λ_j bilden eine Basis von $H_A(\lambda_j)$, wobei $1 \leq j \leq m$.

Diese Hauptvektorketten für alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ zusammengenommen bilden eine Basis von \mathbb{C}^n , auch *Jordanbasis* für A genannt.

Wir stellen eine solche Basis als Spalten in eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Dann ist die Matrix $J := S^{-1}AS$ eine Blockdiagonalmatrix.

Ist in den Spalten von S an Position k bis Position $k + s - 1$ eine Hauptvektorkette von Länge s zum Eigenwert λ_j zu finden, dann hat J in den Spalten an Position k bis Position $k + s - 1$ als Diagonalblock die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & \lambda_j & 1 & \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \lambda_j & & \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{s \times s}.$$

Wir sagen, J ist in Jordanform.

Damit ist Plan 3 umgesetzt.

Beispiel 15 Wir setzen Beispiel 12 fort.

Es ist $\lambda_1 = 0$ und

$$A_{(1)} = A - 0E_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es hat λ_1 die algebraische Vielfachheit 5.

Wir haben in Beispiel 12 folgende Basis von $H_A(\lambda_1)$ erhalten.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{3,1}}$$

Dabei ist $x_{1,1}, x_{1,2}$ eine Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$ und $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}$ eine Basis von $\text{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Wir setzen $y_{3,1} := x_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es ist $A_{(1)}y_{3,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Durch Hinzufügen von $A_{(1)}y_{3,1}$ und durch Weglassen von $x_{2,1}$ wird nun

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A_{(1)}y_{3,1}}$$

zu einer Basis von $\text{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Wir setzen $y_{2,1} := x_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es ist $A_{(1)}^2y_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A_{(1)}y_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Durch Hinzufügen von $A_{(1)}^2y_{3,1}$ und $A_{(1)}y_{2,1}$ und durch Weglassen von $x_{1,1}$ und $x_{1,2}$ wird nun

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(1)}^2y_{3,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(1)}y_{2,1}}$$

zu einer Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$.

Wir haben die folgenden beiden Hauptvektorketten erhalten.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(1)}^2 y_{3,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A_{(1)} y_{3,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y_{3,1}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(1)} y_{2,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_{2,1}}$$

Diese zusammengenommen bilden eine Basis von $H_A(\lambda_1)$.

Da es nur einen Eigenwert gibt, ist dies auch bereits eine Jordanbasis von \mathbb{C}^5 für A . Demgemäß setzen wir

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in Jordanform.

Definition 16 Sei $n \geq 1$. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Wir setzen

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Dies wollen wir im folgenden Beispiel einmal berechnen.

Um die Jordanform dafür zum Einsatz zu bringen, bemerken wir, das

$$S^{-1} \exp(A) S = \exp(S^{-1}AS)$$

ist für eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Beispiel 17 Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\chi_A(t) = t \cdot (t - 1)^5$.

Es ist $\lambda_1 := 0$ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1.

Es ist $\lambda_2 := 1$ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 5.

Zu λ_1 .

Es wird $A_{(1)}$ durch Zeilenumformungen und Weglassen von Nullzeilen zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Also ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,1}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$.

Nun ist $\dim \text{Kern}(A_{(1)}) = 1$ erreicht, es ist also $\text{Kern}(A_{(1)}) = H_A(\lambda_1)$.

Wir setzen $y_{1,1} := x_{1,1}$.

Wir haben die folgende Hauptvektorkette erhalten.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: y_{1,1}}$$

Diese bildet eine Basis von $H_A(\lambda_1)$.

Man erkennt, daß im Falle $\dim \text{Kern}(A_{(1)}) = \dim H_A(\lambda_1)$, also im Falle der Gleichheit zwischen algebraischer und geometrischer Vielfachheit, eine aus Hauptvektorketten bestehende Basis von $H_A(\lambda_1)$ schlicht eine aus Eigenvektoren bestehende Basis des Eigenraums $\text{Kern}(A_{(1)})$ ist, daß also diesenfalls der hier vorgestellte Algorithmus sich zum gewöhnlichen Diagonalisierungs-Verfahren reduziert.

Zu λ_2 .

Es wird $A_{(2)}$ durch Zeilenumformungen und Weglassen von Nullzeilen zu

$$B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,2}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(2)})$.

Es wird $B' \cdot A_{(2)}$ durch Zeilenumformungen und Weglassen von Nullzeilen zu

$C' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{2,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{2,2}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(2)}^2)$, die obige Basis von $\text{Kern}(A_{(2)})$ ergänzt.

Es wird $C' \cdot A_{(2)} = (-1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1)$. Also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{3,1}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(2)}^3)$, die obige Basis von $\text{Kern}(A_{(2)}^2)$ ergänzt.

Nun ist $\dim \text{Kern}(A_{(2)}^3) = 5$ erreicht, es ist also $\text{Kern}(A_{(2)}^3) = H_A(\lambda_2)$.

Wir setzen $y_{3,1} := x_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es ist $A_{(2)}y_{3,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Durch Hinzufügen von $A_{(2)}y_{3,1}$ und durch Weglassen von $x_{2,2}$ wird nun

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y_{3,1}}$$

zu einer Basis von $\text{Kern}(A_{(2)}^2)$.

Wir setzen $y_{2,1} := x_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es ist $A_{(2)}^2y_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A_{(2)}y_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Durch Hinzufügen von $A_{(2)}^2y_{3,1}$ und $A_{(2)}y_{2,1}$ und durch Weglassen von $x_{1,1}$ und $x_{1,2}$ wird nun

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}^2y_{3,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y_{2,1}}$$

zu einer Basis von $\text{Kern}(A_{(2)}^2)$.

Wir haben die folgenden beiden Hauptvektorketten erhalten.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}^2y_{3,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y_{3,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_{3,1}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_{2,1}}$$

Diese zusammengenommen bilden eine Basis von $H_A(\lambda_2)$.

Zusammensetzen zu S .

Die gefundenen Hauptvektorketten für $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$ bilden die Spalten der Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in Jordanform.

Berechnung von $\exp(J)$.

Für $n \geq 0$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, wie man mit Induktion erkennt.

Für $n \geq 0$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wie man mit Induktion erkennt.

Also ist

$$J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & (n-1)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir beobachten noch, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = e$ und daß $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)/2}{n!} = e/2$ ist.

Es folgt

$$\exp(J) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & e & e/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich wird

$$\exp(A) = \exp(SJS^{-1}) = S \exp(J) S^{-1} = \frac{e}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & -4 & -10 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -4 & -8 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kapitel 2

Newtonverfahren

2.1 Problemstellung

Plan 18 Sei eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ unser Definitionsbereich.

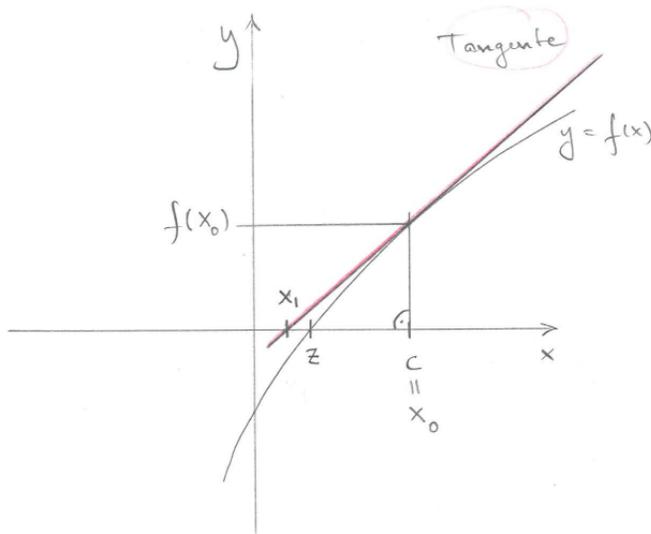
Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Sei $c \in D$ eine erste Näherung einer Nullstelle z von f .

Wir starten unsere Iteration bei $x_0 := c$ als Anfangsstelle.

Die Tangente an den Graphen von f in x_0 hat die Steigung $f'(x_0)$.

Sei x_1 der Schnittpunkt dieser Tangente mit der x -Achse.



Am Steigungsdreieck erkennen wir, daß $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$ ist. Somit wird $x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

und also

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Es ist x_1 dann unsere verbesserte Näherung der Nullstelle z .

Auf dieselbe Weise wollen wir x_1 zu x_2 verbessern: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Sodann wollen wir x_2 zu x_3 verbessern: $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$.

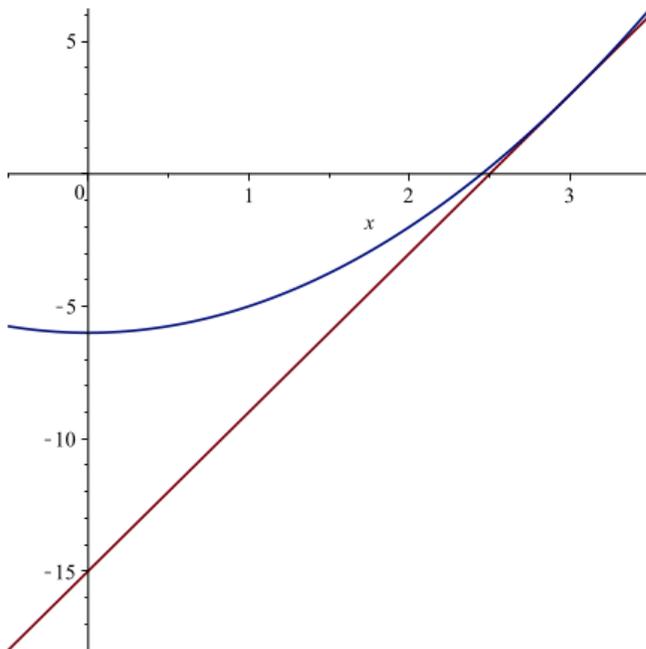
Usf.

Dann sollte die Folge der Näherungen $(x_0, x_1, x_2, x_3 \dots)$ gegen die tatsächliche Nullstelle z von f konvergieren.

Und dies auch noch schnell.

Wir wollen die Rahmenbedingungen klären, die dies sicherstellen.

Beispiel 19 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 6$.



Das Newtonverfahren gehorcht der Vorschrift

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 6}{2x_k}.$$

Mit der Anfangsstelle $c = 3$ gibt das Newton-Verfahren nachstehende Folge.

$$\begin{aligned} x_0 &= c &&= 3 \\ x_1 &= x_0 - \frac{x_0^2 - 6}{2x_0} &&= 2,5 \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^2 - 6}{2x_1} &&= 2,45 \\ x_3 &= x_2 - \frac{x_2^2 - 6}{2x_2} &&\approx 2,4494898 \end{aligned}$$

Usf.

Wir haben die Nullstelle $z = \sqrt{6} \approx 2,449489743$.

Beispiel 20 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$.

Wir haben die Nullstelle $z = 0$.

Das Newtonverfahren gehorcht der Vorschrift

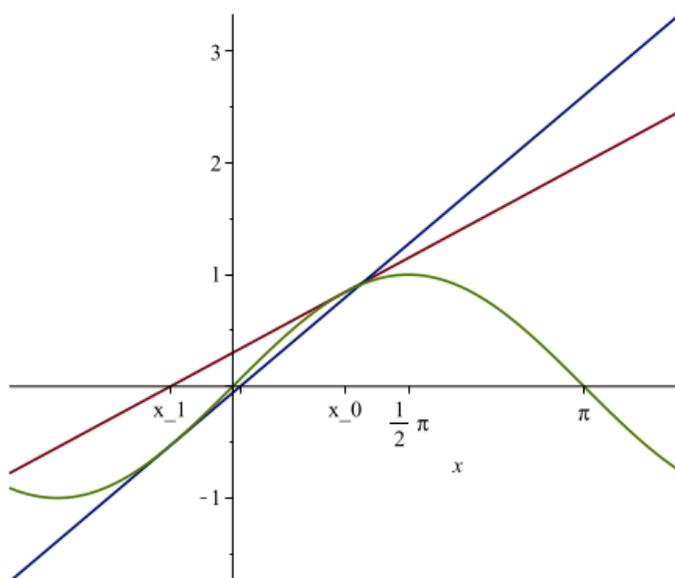
$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\sin(x_k)}{\cos(x_k)} = x_k - \tan(x_k).$$

Wir starten einen ersten Versuch. Wir wollen mit der Anfangsstelle $c = 1$ die Nullstelle $z = 0$ zu approximieren.

Es wird

$$\begin{aligned} x_0 &= c &&= 1,0 \\ x_1 &= x_0 - \tan(x_0) &&\approx -0,56 \\ x_2 &= x_1 - \tan(x_1) &&\approx 0,066 \\ x_3 &= x_2 - \tan(x_2) &&\approx -0,000095 \end{aligned}$$

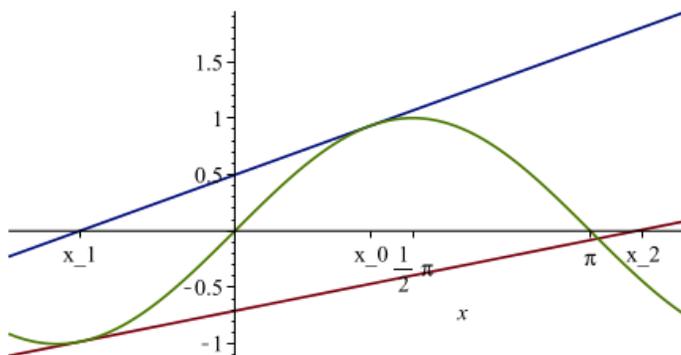
Usf. Das scheint zu funktionieren.



Wir starten einen zweiten, etwas optimistischeren Versuch. Wir wollen mit der etwas weiter von $z = 0$ entfernten Anfangsstelle $c = 1,2$ die Nullstelle $z = 0$ approximieren. Es wird

$$\begin{aligned}x_0 &= c &&= 1,2 \\x_1 &= x_0 - \tan(x_0) &&\approx -1,37 \\x_2 &= x_1 - \tan(x_1) &&\approx 3,60 \\x_3 &= x_2 - \tan(x_2) &&\approx 3,1416\end{aligned}$$

Usf. Das scheint nicht zu funktionieren. Vielmehr wird wohl versehentlich die Nullstelle π approximiert.



2.2 Das Newtonverfahren

Satz 21 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen.

Sei

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

dreimal stetig differenzierbar.

Sei $f'(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$.

Wir schreiben

$$\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

für $x \in [a, b]$.

Seien $a, b \in D$ mit $a < b$ und $[a, b] \subseteq D$ gegeben.

Seien $a < a' < b' < b$ gegeben mit $f(a') \cdot f(b') \leq 0$.

Also gibt es genau ein $z \in [a', b']$ mit $f(z) = 0$.

Seien

$$\begin{aligned}\rho &:= \min\{a' - a, b - b'\}, \\ \delta &:= \max\{b' - a, b - a'\}.\end{aligned}$$

Sei

$$|\Phi''(x)| < \frac{2\rho}{\delta^2} \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Sei $c \in [a, b]$ unsere Anfangsstelle.

Wir setzen rekursiv

$$\begin{aligned}x_0 &:= c \\ x_{n+1} &:= \Phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für } n \geq 0\end{aligned}$$

Dann ist $x_n \in [a, b]$ für $n \geq 0$ und

$$z := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Quantitativ ist

$$|x_{n+1} - z| \leq \frac{1}{2} \max\{|\Phi''(x)| : x \in [a, b]\} \cdot |x_n - z|^2.$$

Begründung. Ableiten der Definition gibt

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Speziell ist $\Phi(z) = z$ und $\Phi'(z) = 0$.

Entwickeln nach Taylor zum Entwicklungspunkt z gibt

$$\Phi(x) = \Phi(z) + \Phi'(z)(x - z) + \frac{1}{2}\Phi''(\xi)(x - z)^2 = z + \frac{1}{2}\Phi''(\xi)(x - z)^2$$

für $x \in [a, b]$ und ein ξ zwischen z und x . Es folgt

$$|\Phi(x) - z| = \frac{1}{2}|\Phi''(\xi)| \cdot |x - z|^2$$

Schreibe $K := \max\{|\Phi''(x)| : x \in [a, b]\}$.

Da $|\Phi''(x)|$ auf $[a, b]$ ein Maximum annimmt, geben die Voraussetzungen, daß $K < \frac{2\rho}{\delta^2}$ ist.

Da $z \in [a', b']$ und $x \in [a, b]$, ist $|x - z| \leq \delta$ und $\rho \leq \min\{z - a, b - z\}$.

Falls $x \neq z$, so erhalten wir

$$|\Phi(x) - z| = \frac{1}{2}|\Phi''(\xi)| \cdot |x - z|^2 \leq \frac{1}{2}K|x - z|^2 < \frac{\rho}{\delta^2}|x - z|^2 \leq \rho \leq \min\{z - a, b - z\}.$$

Für $x \in [a, b]$ ist also auch $\Phi(x) \in [a, b]$.

Ferner folgt $|x_{n+1} - z| \leq \frac{1}{2}K|x_n - z|^2$ für $n \geq 0$.

Schließlich ist $\rho < \delta$. Also folgt aus

$$|\Phi(x) - z| \leq \frac{\rho}{\delta^2}|x - z|^2 \leq \frac{\rho}{\delta}|x - z|,$$

daß $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - z| = 0$ und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ ist.

Beispiel 22 Wir greifen Beispiel 19 wieder auf.

Dort war $f(x) = x^2 - 6$.

Sei $a := 2$, $a' := \frac{7}{3}$, $b' := \frac{8}{3}$ und $b := 3$.

Es wird $\rho = \min\{a' - a, b - b'\} = \frac{1}{3}$ und $\delta = \max\{b' - a, b - a'\} = \frac{2}{3}$.

Ferner ist $f(a') \cdot f(b') = (\frac{49}{9} - 6) \cdot (\frac{64}{9} - 6) < 0$.

Es wird

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x - \frac{x^2 - 6}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{3}{x} \\ \Phi'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{x^2} \\ \Phi''(x) &= -\frac{6}{x^3}\end{aligned}$$

Somit ist

$$|\Phi''(x)| = 6x^{-3} \leq \frac{3}{4} < \frac{3}{2} = \frac{2\rho}{\delta^2}$$

für $x \in [a, b] = [2, 3]$.

Sei $c := 3 \in [2, 3]$.

Satz 21 garantiert nun, daß das Newtonverfahren mit der Anfangsstelle $c = 3$ eine Folge $(x_n)_n$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z = \sqrt{6}$.

Mit anderen Worten, der Ansatz in Beispiel 19 muß funktionieren.

Quantitativ erhalten wir, daß

$$|x_{n+1} - z| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} |x_n - z|^2$$

ist für $n \geq 0$. Überprüfen wir dies anhand unserer Zahlen:

$$\begin{aligned}|x_1 - z| &\approx 5,1 \cdot 10^{-2} \leq 11,4 \cdot 10^{-2} \approx \frac{3}{8} |x_0 - z|^2 \\ |x_2 - z| &\approx 5,1 \cdot 10^{-4} \leq 9,6 \cdot 10^{-4} \approx \frac{3}{8} |x_1 - z|^2 \\ |x_3 - z| &\approx 5,3 \cdot 10^{-8} \leq 9,8 \cdot 10^{-8} \approx \frac{3}{8} |x_2 - z|^2\end{aligned}$$

Usf.

Beispiel 23 Wir greifen Beispiel 20 wieder auf.

Dort war $f(x) = \sin(x)$ und $\Phi(x) = x - \tan(x)$.

Sei $a := -\frac{1}{3}$, $a' := -\frac{1}{6}$, $b' := +\frac{1}{6}$ und $b := +\frac{1}{3}$.

Es wird $\rho = \min\{a' - a, b - b'\} = \frac{1}{6}$ und $\delta = \max\{b' - a, b - a'\} = \frac{1}{2}$.

Ferner ist $f(a') \cdot f(b') = \sin(-1/6) \cdot \sin(1/6) < 0$.

Es wird

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x - \tan(x) \\ \Phi'(x) &= -\tan(x)^2 \\ \Phi''(x) &= -2\tan(x)(1 + \tan(x)^2)\end{aligned}$$

Somit ist

$$|\Phi''(x)| = |2\tan(x)(1 + \tan(x)^2)| \leq 2\tan(1/3)(1 + \tan(1/3)^2) \leq 0,78 < \frac{4}{3} = \frac{2\rho}{\delta^2}$$

für $x \in [a, b] = [-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}]$.

Sei $c := \frac{1}{3} \in [-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}]$.

Satz 21 garantiert nun, daß das Newtonverfahren mit der Anfangsstelle $c = \frac{1}{3}$ eine Folge $(x_n)_n$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z = 0$.

Die Ansätze in Beispiel 20 mit den Anfangsstellen 1,0 und 1,2 waren dagegen beide auf Optimismus gegründet.

Quantitativ erhalten wir für die Anfangsstelle $c = \frac{1}{3}$, daß

$$|x_{n+1} - z| \leq \frac{1}{2} \cdot 0,78 \cdot |x_n - z|^2$$

ist für $n \geq 0$. Überprüfen wir dies anhand unserer Zahlen:

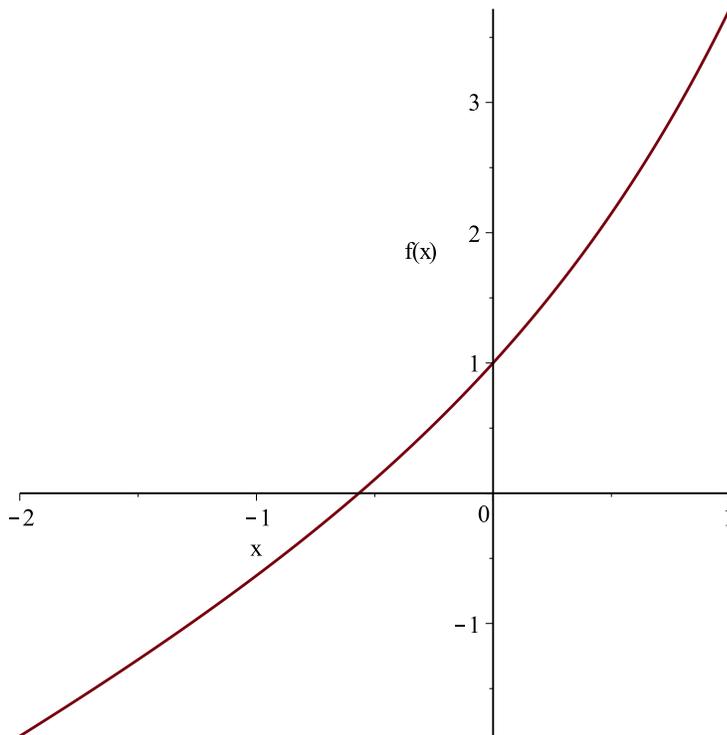
$$\begin{aligned}|x_1 - z| &\approx 1,3 \cdot 10^{-2} \leq 4,3 \cdot 10^{-2} \approx 0,39 \cdot |x_0 - z|^2 \\ |x_2 - z| &\approx 7,2 \cdot 10^{-7} \leq 6,5 \cdot 10^{-5} \approx 0,39 \cdot |x_1 - z|^2 \\ |x_3 - z| &\approx 1,2 \cdot 10^{-19} \leq 2,0 \cdot 10^{-13} \approx 0,39 \cdot |x_2 - z|^2\end{aligned}$$

Usf.

Die Konvergenz ist deutlich besser als garantiert wurde. Der Grund darin liegt in $f''(0) = 0$, was dazu führt, daß in der Nähe der Stelle 0 Tangenten eine sehr gute Näherung an die Funktion geben.

Beispiel 24 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + e^x$.

Da $f'(x) = 1 + e^x > 0$ gilt für $x \in \mathbb{R}$, da $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ist und da $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ist, folgt, daß f genau eine Nullstelle $z \in \mathbb{R}$ hat.



Fragt man nun ein Computeralgebrasystem wie Maple nach der Nullstelle dieser Funktion, so erhält man folgende Antwort.

Die Lambertsche Funktion $w : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ ist definiert als die Umkehrfunktion von $u : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) : x \mapsto x \cdot e^x$. Es ist $u(w(x)) = x$ für $x \geq 0$ und also $1 = u(w(1)) = w(1) \cdot e^{w(1)}$. Es folgt $e^{-w(1)} = w(1)$ und also $f(-w(1)) = e^{-w(1)} + (-w(1)) = 0$. Der Rechner gibt nun

$$z = -w(1) \approx -0,56714.$$

Nun wollen wir das Newtonverfahren einsetzen, um diese Nullstelle anzunähern.

Sei $a := -1$, $a' := -0,6$, $b' := -0,5$ und $b := 0$.

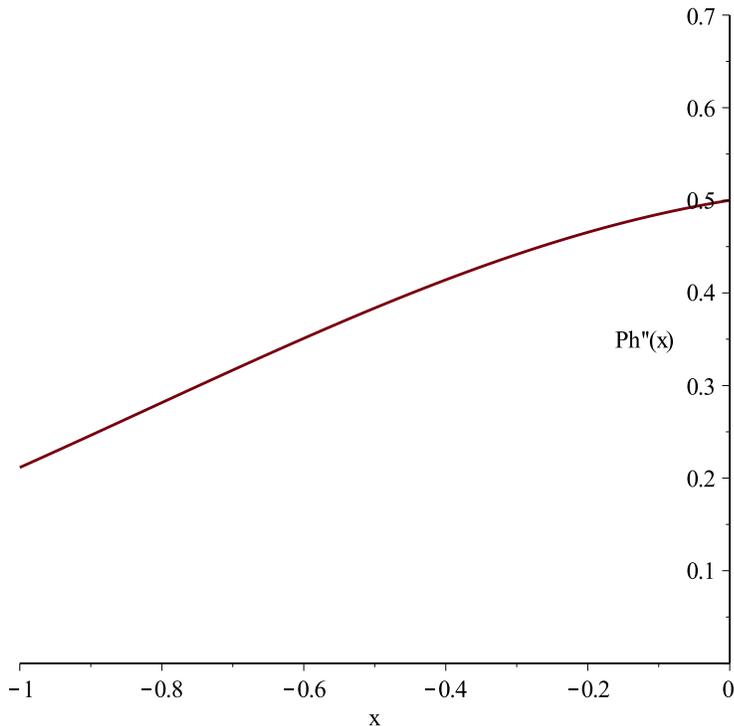
Es wird $\rho = \min\{a' - a, b - b'\} = 0,4$ und $\delta = \max\{b' - a, b - a'\} = 0,6$.

Ferner ist $f(a') \cdot f(b') \approx -0,051 \cdot 0,107 < 0$.

Es wird

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x - \frac{x+e^x}{1+e^x} \\ \Phi'(x) &= \frac{e^x \cdot (x+e^x)}{(1+e^x)^2} \\ \Phi''(x) &= \frac{e^x \cdot ((3-x)e^x + x + 1)}{(1+e^x)^3}\end{aligned}$$

Wir betrachten das Verhalten von $\Phi''(x)$ auf $[a, b] = [-1, 0]$:



Laut Graphik ist dort $\Phi''(x)$ positiv und monoton wachsend. Das genüge uns als Begründung.

Somit ist

$$|\Phi''(x)| \leq \Phi''(0) = 0,5$$

für $x \in [-1, 0]$.

Sei $c := 0 \in [-1, 0]$.

Satz 21 garantiert nun, daß das Newtonverfahren mit der Anfangsstelle $c = 0$ eine Folge $(x_n)_n$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$.

Quantitativ erhalten wir für die Anfangsstelle $c = 0$, daß

$$|x_{n+1} - z| \leq \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot |x_n - z|^2$$

ist für $n \geq 0$. Überprüfen wir dies anhand unserer Zahlen.

Zunächst wird

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= -0,5 \\ x_2 &\approx -0,5663 \\ x_3 &\approx -0,56714317 \end{aligned}$$

Sodann wird

$$\begin{aligned} |x_1 - z| &\approx 6,71 \cdot 10^{-2} \leq 8,04 \cdot 10^{-2} \approx 0,25 \cdot |x_0 - z|^2 \\ |x_2 - z| &\approx 8,32 \cdot 10^{-4} \leq 11,27 \cdot 10^{-4} \approx 0,25 \cdot |x_1 - z|^2 \\ |x_3 - z| &\approx 1,25 \cdot 10^{-7} \leq 1,73 \cdot 10^{-7} \approx 0,25 \cdot |x_2 - z|^2 \end{aligned}$$

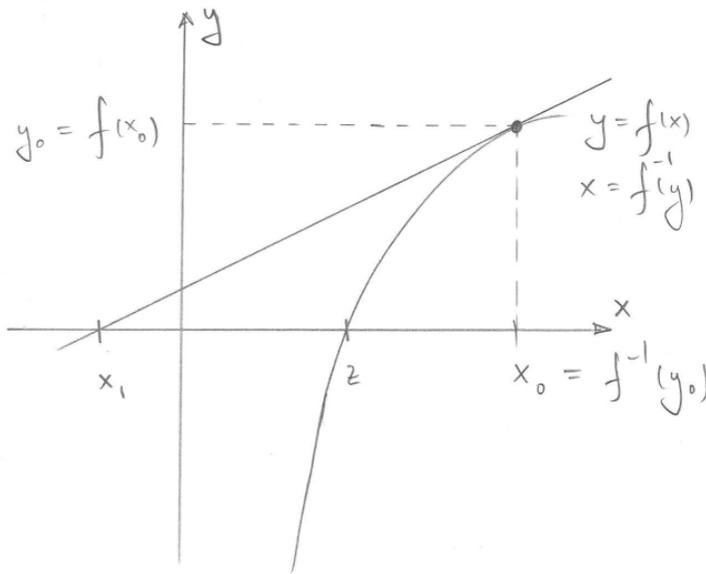
Usf.

2.3 Das Newtonverfahren höherer Ordnung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar.

Sei $c \in D$ unsere Anfangsstelle.

Sei $x_0 := c$. Sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f invertierbar in einer Umgebung von x_0 , mit einer inversen Funktion, die in einer Umgebung von $y_0 := f(x_0)$ definiert ist.



Plan 25 Wir wollen nun das herkömmliche Newtonverfahren präzisieren.

Wie wir bislang vorgegangen sind:

Es ist $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Die verwendete Tangente wird beschrieben durch das Taylorpolynom erster Ordnung

$$T_1(f^{-1}, y, y_0) = f^{-1}(y_0) + (f^{-1})'(y_0) \cdot (y - y_0).$$

Wir erhalten \tilde{x}_1 , indem wir in $T_1(f^{-1}, y, y_0)$ den Wert $y = 0$ einsetzen.

$$x_1 = f^{-1}(y_0) + (f^{-1})'(y_0) \cdot (0 - y_0) = f^{-1}(y_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot y_0 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot f(x_0),$$

wie bekannt.

Wir schreiben nun auch

$$\Phi_1(x) := \Phi(x) = x - \frac{1}{f'(x)} \cdot f(x).$$

Mit der Anfangsstelle $x_0 = c$ wurde rekursiv $x_{n+1} := \Phi_1(x_n)$ gesetzt, um eine Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ zu bekommen, die gegen eine Nullstelle von f konvergiert.

Der Plan ist nun, in diesem Vorgehen T_1 durch T_k für ein $k \geq 2$ zu ersetzen. Denn je größer k , desto besser ist i.a. die Näherung.

Genauer gesagt werden wir uns mit $k = 2$ und $k = 3$ befassen.

Wir werden diese verbesserten beiden Verfahren vorstellen. Wir werden sie aber nicht mit genauen Fehlerschranken zur sicheren Durchführung versehen, wie wir dies im Falle des herkömmlichen Newtonverfahren in Satz 21 getan haben. Wir werden für eine Fehlerabschätzung im Falle $k = 2$ lediglich Bemerkung 28 nachreichen.

Natürlich funktioniert das Verfahren dann nicht mehr unbedingt, wenn für die weiteren Iterationsschritte die Voraussetzungen nicht mehr gelten, die wir für die Anfangsstelle gemacht haben.

Bemerkung 26 Eine Nebenrechnung.

Es ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Also wird

$$(f^{-1})''(y) = \frac{d}{dy} f'(f^{-1}(y))^{-1} = -f'(f^{-1}(y))^{-2} \cdot f''(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = -\frac{f''(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(y))^3}.$$

Also wird

$$\begin{aligned} & (f^{-1})'''(y) \\ &= \frac{d}{dy} (-f''(f^{-1}(y)) \cdot f'(f^{-1}(y))^{-3}) \\ &= -f'''(f^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \cdot f'(f^{-1}(y))^{-3} - f''(f^{-1}(y)) \cdot (-3) \cdot f'(f^{-1}(y))^{-4} \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= \frac{-f'''(f^{-1}(y)) \cdot f'(f^{-1}(y)) + 3f''(f^{-1}(y))^2}{f'(f^{-1}(y))^5}. \end{aligned}$$

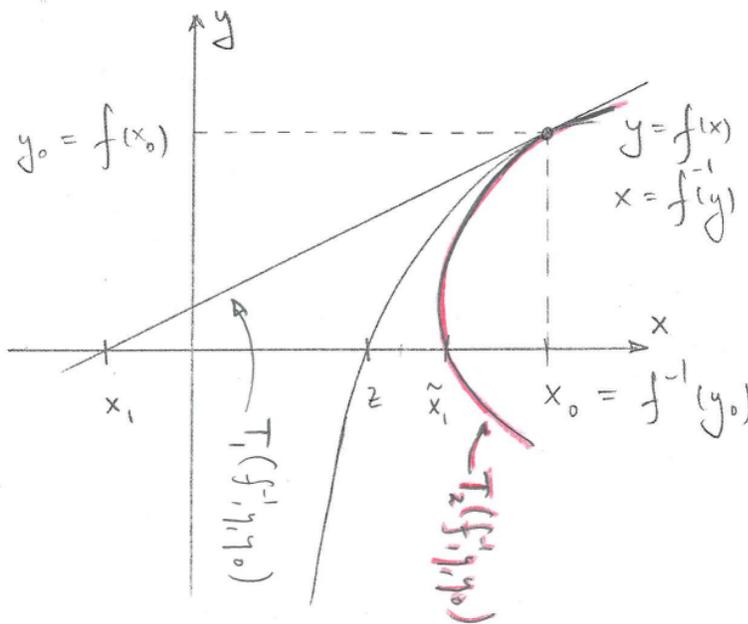
Bemerkung 27 Wir wollen T_2 zum Einsatz bringen.

Sei $x_0 = c$ die Anfangsstelle.

Die Näherung zweiter Stufe an f^{-1} ist

$$T_2(f^{-1}, y, y_0) = f^{-1}(y_0) + (f^{-1})'(y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2}(f^{-1})''(y_0) \cdot (y - y_0)^2.$$

In folgender Skizze wurde zum Vergleich die mittels T_1 erhaltene Stelle als x_1 und die mittels T_2 erhaltene Stelle mit \tilde{x}_1 bezeichnet.



Wir wollen nun aber die mittels T_2 erhaltene Stelle einfach wieder x_1 nennen. Wir erhalten x_1 , indem wir in $T_2(f^{-1}, y, y_0)$ den Wert $y = 0$ einsetzen.

Bemerkung 26 hilft beim Umformen.

$$\begin{aligned} x_1 &= f^{-1}(y_0) + (f^{-1})'(y_0) \cdot (0 - y_0) + \frac{1}{2}(f^{-1})''(y_0) \cdot (0 - y_0)^2 \\ &= x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot f(x_0) + \frac{1}{2}(f^{-1})''(y_0) \cdot f(x_0)^2 \\ &= x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot f(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)^3} \cdot f(x_0)^2. \end{aligned}$$

Sei demgemäß

$$\Phi_2(x) := x - \frac{1}{f'(x)} \cdot f(x) - \frac{f''(x)}{2f'(x)^3} \cdot f(x)^2.$$

Das Newton-Verfahren zweiter Ordnung sieht also vor, bei gewählter Anfangsstelle $x_0 = c$ rekursiv

$$x_{i+1} := \Phi_2(x_i)$$

zu setzen für $i \geq 0$.

Bemerkung 28 Eine Fehlerabschätzung in der Situation von Bemerkung 27.

Sei der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß wir über $a \leq c \leq b$ in D verfügen mit $f'(x) > 0$ für $x \in [a, b]$ und mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$.

Sei $z \in [a, b]$ die dortige Nullstelle von f .

Sei nun $y_0 = f(x_0) = f(c) > 0$ vorausgesetzt. Dann ist $z < c$.

Es bildet f das Intervall $[z, x_0]$ bijektiv auf das Intervall $[0, y_0]$ ab.

Das Restglied nach Lagrange gibt

$$z = f^{-1}(0) = T_2(f^{-1}, 0, y_0) + R_2(f^{-1}, 0, y_0) = x_1 + \frac{1}{6}(f^{-1})'''(\eta) \cdot (0 - y_0)^3$$

für ein $\eta \in [0, y_0]$. Bemerkung 26 gibt also

$$|x_1 - z| = \left| \frac{1}{6}(f^{-1})'''(\eta) \cdot y_0^3 \right| = \left| \frac{-f'''(f^{-1}(\eta)) \cdot f'(f^{-1}(\eta)) + 3f''(f^{-1}(\eta))^2}{6f'(f^{-1}(\eta))^5} \right| \cdot f(x_0)^3.$$

Man beachte $f^{-1}(\eta) \in [z, x_0] \subseteq [a, b]$.

Mit

$$\mu := \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{-f'''(x) \cdot f'(x) + 3f''(x)^2}{6f'(x)^5} \right|$$

ist also

$$|x_1 - z| \leq \mu \cdot |f(x_0)|^3.$$

Dieselbe Ungleichung ergibt sich auch im Falle $y_0 = f(x_0) = f(c) \leq 0$.

Bemerkung 29 Wir wollen T_3 zum Einsatz bringen.

Sei $x_0 = c$ die Anfangsstelle.

Die Näherung dritter Stufe an f^{-1} ist

$$T_3(f^{-1}, y, y_0) = f^{-1}(y_0) + (f^{-1})'(y_0) \cdot (y - y_0) + \frac{1}{2}(f^{-1})''(y_0) \cdot (y - y_0)^2 + \frac{1}{6}(f^{-1})'''(y_0) \cdot (y - y_0)^3.$$

Wir erhalten x_1 , indem wir in $T_3(f^{-1}, y, y_0)$ den Wert $y = 0$ einsetzen. Bemerkung 26 hilft beim Umformen.

$$\begin{aligned} x_1 &= f^{-1}(y_0) + (f^{-1})'(y_0) \cdot (0 - y_0) + \frac{1}{2}(f^{-1})''(y_0) \cdot (0 - y_0)^2 + \frac{1}{6}(f^{-1})'''(y_0) \cdot (0 - y_0)^3 \\ &= x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot f(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)^3} \cdot f(x_0)^2 + \frac{f'''(f^{-1}(y_0)) \cdot f'(f^{-1}(y_0)) - 3f''(f^{-1}(y_0))^2}{6f'(f^{-1}(y_0))^5} \cdot f(x_0)^3 \\ &= x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot f(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)^3} \cdot f(x_0)^2 + \frac{f'''(x_0) \cdot f'(x_0) - 3f''(x_0)^2}{6f'(x_0)^5} \cdot f(x_0)^3. \end{aligned}$$

Sei demgemäß

$$\Phi_3(x) := x - \frac{1}{f'(x)} \cdot f(x) - \frac{f''(x)}{2f'(x)^3} \cdot f(x)^2 + \frac{f'''(x) \cdot f'(x) - 3f''(x)^2}{6f'(x)^5} \cdot f(x)^3.$$

Das Newton-Verfahren dritter Ordnung sieht also vor, bei gewählter Anfangsstelle $x_0 = c$ rekursiv

$$x_{i+1} := \Phi_3(x_i)$$

zu setzen für $i \geq 0$.

Beispiel 30 Wir greifen Beispiel 24 wieder auf.

Sei also $f(x) = x + e^x$.

Es hat f eine Nullstelle bei $z = -0,56714\dots$

Wir wollen nun zwecks Vergleich simultan die vorgestellten Varianten des Newtonverfahrens durchführen und jeweils den Abstand der gefundenen Stelle zu z ermitteln.

Es ist

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= x - \frac{1}{f'(x)} \cdot f(x) \\ &= x - \frac{x + e^x}{1 + e^x}. \end{aligned}$$

Wir setzen $x_0 := 0$ und $x_{i+1} := \Phi_1(x_i)$ für $i \geq 0$. Dies ist das herkömmliche Newtonverfahren.

Es ist

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= x - \frac{1}{f'(x)} \cdot f(x) - \frac{f''(x)}{2f'(x)^3} \cdot f(x)^2 \\ &= x - \frac{x + e^x}{1 + e^x} - \frac{e^x(x + e^x)^2}{2(1 + e^x)^3}. \end{aligned}$$

Wir setzen $\tilde{x}_0 := 0$ und $\tilde{x}_{i+1} := \Phi_2(\tilde{x}_i)$ für $i \geq 0$. Dies ist das Newtonverfahren zweiter Ordnung.

Es ist

$$\begin{aligned} \Phi_3(x) &= x - \frac{1}{f'(x)} \cdot f(x) - \frac{f''(x)}{2f'(x)^3} \cdot f(x)^2 + \frac{f'''(x) \cdot f'(x) - 3f''(x)^2}{6f'(x)^5} \cdot f(x)^3 \\ &= x - \frac{x + e^x}{1 + e^x} - \frac{e^x(x + e^x)^2}{2(1 + e^x)^3} + \frac{e^x(x + e^x)^3}{6(1 + e^x)^4} - \frac{e^{2x}(x + e^x)^3}{2(1 + e^x)^5}. \end{aligned}$$

Wir setzen $\tilde{\tilde{x}}_0 := 0$ und $\tilde{\tilde{x}}_{i+1} := \Phi_3(\tilde{\tilde{x}}_i)$ für $i \geq 0$. Dies ist das Newtonverfahren dritter Ordnung.

Wir erhalten folgende Abstände der jeweils gefundenen Stelle von z .

$$\begin{array}{lll}
 |x_0 - z| \approx 5,6 \cdot 10^{-1} & |\tilde{x}_0 - z| \approx 5,6 \cdot 10^{-1} & |\tilde{\tilde{x}}_0 - z| \approx 5,6 \cdot 10^{-1} \\
 |x_1 - z| \approx 6,7 \cdot 10^{-2} & |\tilde{x}_1 - z| \approx 4,6 \cdot 10^{-3} & |\tilde{\tilde{x}}_1 - z| \approx 5,7 \cdot 10^{-4} \\
 |x_2 - z| \approx 8,3 \cdot 10^{-4} & |\tilde{x}_2 - z| \approx 5,3 \cdot 10^{-10} & |\tilde{\tilde{x}}_2 - z| \approx 1,0 \cdot 10^{-15} \\
 |x_3 - z| \approx 1,3 \cdot 10^{-7} & |\tilde{x}_3 - z| \approx 7,8 \cdot 10^{-31} & |\tilde{\tilde{x}}_3 - z| \approx 1,0 \cdot 10^{-62} \\
 |x_4 - z| \approx 2,8 \cdot 10^{-15} & |\tilde{x}_4 - z| \approx 2,5 \cdot 10^{-93} & |\tilde{\tilde{x}}_4 - z| \approx 1,0 \cdot 10^{-250}
 \end{array}$$

Usf.

Es wird der Exponent in der linken Spalte jeweils etwa mit 2 multipliziert, in der mittleren etwa mit 3, in der rechten etwa mit 4.

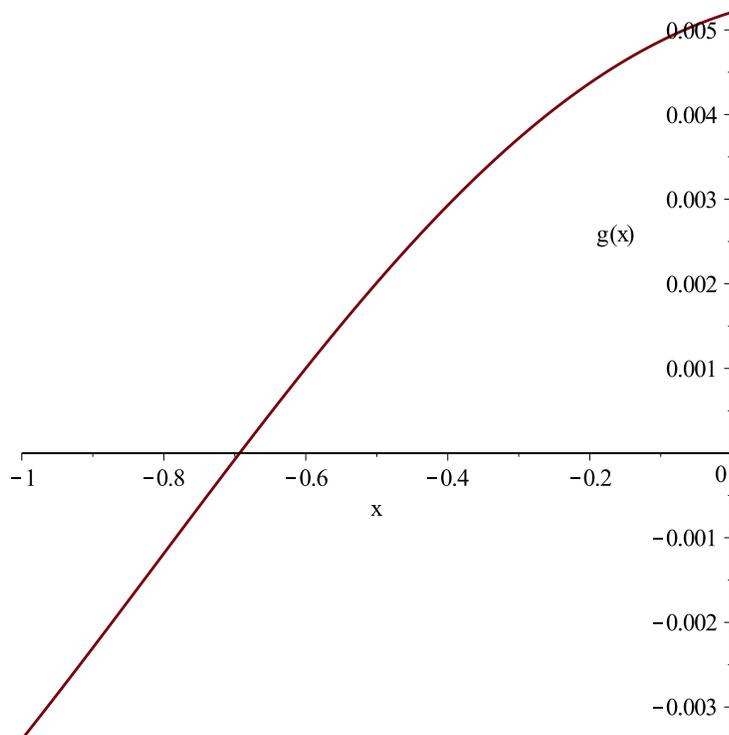
Wir testen noch die Fehlerabschätzung aus Bemerkung 28.

Sei $a := -1$, sei $c := 0$, sei $b := 0$.

Auf $[-1, 0]$ lassen wir uns die Funktion

$$g(x) := \frac{-f'''(x) \cdot f'(x) + 3f''(x)^2}{6f'(x)^5} = -\frac{e^x}{6(1+e^x)^4} + \frac{e^{2x}}{2(1+e^x)^5}$$

graphisch darstellen:



Graphisch ermitteln wir so, daß das Maximum μ von $|g(x)|$ auf $[-1, 0]$ unter 0,006 liegt. Folglich ist

$$|\tilde{x}_{i+1} - z| \leq 0,006 \cdot f(x_i)^3$$

für $i \geq 0$.

Tatsächlich wird

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_1 - z| &\approx 4,64 \cdot 10^{-3} \leq 6 \cdot 10^{-3} = 0,006 \cdot |f(\tilde{x}_0)|^3 \\ |\tilde{x}_2 - z| &\approx 5,32 \cdot 10^{-10} \leq 23,18 \cdot 10^{-10} \approx 0,006 \cdot |f(\tilde{x}_1)|^3 \\ |\tilde{x}_3 - z| &\approx 7,80 \cdot 10^{-31} \leq 34,87 \cdot 10^{-31} \approx 0,006 \cdot |f(\tilde{x}_2)|^3 \\ |\tilde{x}_4 - z| &\approx 2,46 \cdot 10^{-93} \leq 10,97 \cdot 10^{-93} \approx 0,006 \cdot |f(\tilde{x}_3)|^3 \end{aligned}$$

Usf.

Beispiel 31 Wir greifen Beispiel 20 wieder auf.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x)$.

Wir wollen die Nullstelle $z = 0$ annähern.

Mit der Anfangsstelle 1,0 erhalten wir folgendes.

$$\begin{aligned} \Phi_1(1,0) &\approx -0,56 \\ \Phi_2(1,0) &\approx 1,33 \\ \Phi_3(1,0) &\approx -3,88 \end{aligned}$$

Bei weiter von der Nullstelle z entfernten Punkten kann also Φ_1 bessere Werte liefern als Φ_2 oder Φ_3 .

Näher bei $z = 0$ kippt dies dann:

$$\begin{aligned} \Phi_1(0,5) &\approx -4,63 \cdot 10^{-2} \\ \Phi_2(0,5) &\approx 3,52 \cdot 10^{-2} \\ \Phi_3(0,5) &\approx -1,63 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Kapitel 3

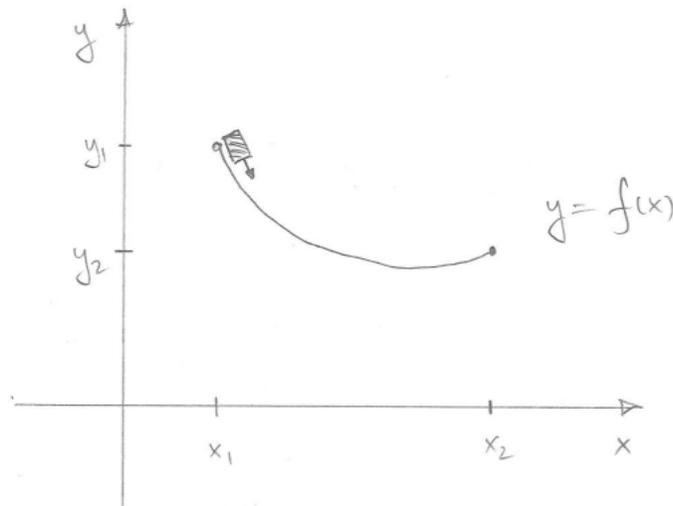
Variationsrechnung

3.1 Problemstellung

Beispiel 32 Gleite ein kleiner Körper im Graviationsfeld reibungsfrei auf einer Kurve, gegeben als Graph einer differenzierbaren Funktion f .

Zum Anfangszeitpunkt befinde er sich bei (x_1, y_1) in Ruhe.

Zum Endzeitpunkt befinde er sich bei (x_2, y_2) .



Wie muß die Funktion f beschaffen sein, damit der Körper möglichst wenig Zeit benötigt?

Diese Funktion f soll dabei $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ erfüllen.

Ist das Gefälle am Anfang zu niedrig, so wird es zu lange dauern, bis der Körper beschleunigt.

nigt. So etwa ist die Strecke, die Anfangs- und Endpunkt verbindet, nicht die optimale Lösung.

Ist das Gefälle am Anfang zu hoch, dann muß der Körper insgesamt einen zu weiten Weg zurücklegen, was die Gesamtdauer zu groß werden läßt.

Wir gehen das Problem rechnerisch an: Sei g die Graviationskonstante. Sei v die Geschwindigkeit des Körpers. Ein Vergleich von kinetischer und potentieller Energie an der Stelle (x, y) gibt

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mg(y - y_1) ,$$

also

$$v = \sqrt{2g(y_1 - f(x))} .$$

Davon die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung beträgt

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g(y_1 - f(x))}{1 + f'(x)^2}} .$$

Die benötigte Zeit von x_1 nach x_2 ist also

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2g(y_1 - f(x))}} dx .$$

Mit $L(z, w, u) := \sqrt{\frac{1+w^2}{2g(y_1-z)}}$ suchen wir also die Funktion f , die

$$\int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx .$$

minimiert.

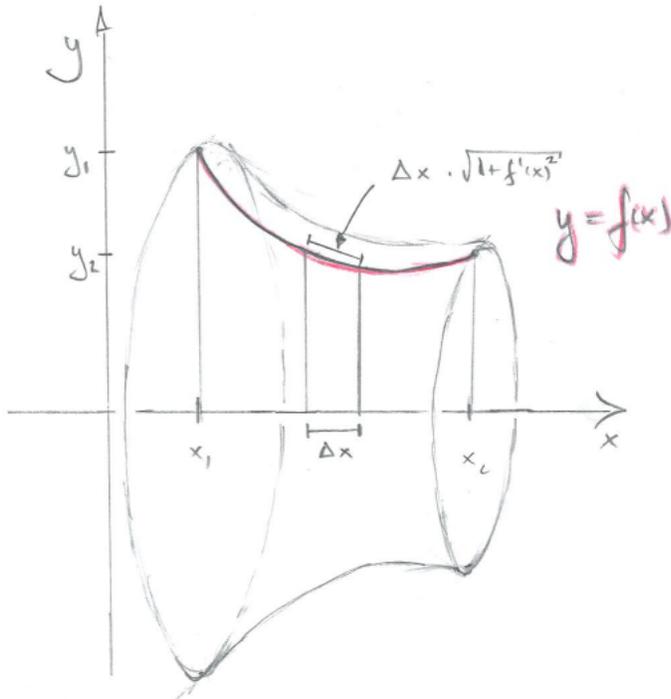
Beispiel 33 Sei $x_1 < x_2$. Seien $y_1, y_2 > 0$.

Sei $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$.

Wir lassen den Graph von f um die x -Achse rotieren.

Wir suchen nun die Funktion f , für welche die Oberfläche dieses Rotationskörpers minimal wird.

Hierbei seien die Deckflächen links und rechts nicht mitgerechnet. Sie haben zusammen den Flächeninhalt $\pi y_1^2 + \pi y_2^2$, unabhängig von f .



Das zu Δx gehörige Flächenstück ist für Δx klein gleich

$$2\pi \cdot \Delta x \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot f(x) .$$

Die Oberfläche ist also

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot f(x) dx .$$

Mit $L(z, w, u) := \sqrt{1 + w^2} \cdot z$ suchen wir also die Funktion f , die

$$\int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx .$$

minimiert.

Plan 34 Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (z, w, x) \mapsto L(z, w, x)$ gegeben.

Seien $x_1 < x_2$ in \mathbb{R} gegeben. Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Um festzustellen, ob der Ausdruck

$$\int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx$$

bei $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ eine Flachstelle hat, überprüfen wir, ob für jede Hilfsfunktion $t(x)$ mit $t(x_1) = 0$ und $t(x_2) = 0$ der für kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}$ in der

Nähe von f entstehende Wert

$$\int_{x_1}^{x_2} L(f(x) + \varepsilon \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot f'(x), x) dx$$

bei $\varepsilon = 0$ eine Flachstelle hat, d.h. ob seine Ableitung nach ε verschwindet.

Dabei werden wir uns der Einfachheit halber die Betrachtung auf globale Minima beschränken.

Ferner wollen wir bei konkreten Beispielen die dabei jeweils entstehende Differentialgleichung nicht allgemein lösen, sondern nur überprüfen, ob vorgegebene Kandidaten sie erfüllen.

3.2 Eine notwendige Bedingung

Lemma 35 Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (z, w, x) \mapsto L(z, w, x)$ stetig partiell differenzierbar.

Wir schreiben $\partial_1 L(z, w, x) = \frac{d}{dz} L(z, w, x)$ und $\partial_2 L(z, w, x) = \frac{d}{dw} L(z, w, x)$.

Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$.

Sei $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$.

Sei

$$\int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx \leq \int_{x_1}^{x_2} L(g(x), g'(x), x) dx$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x_1) = y_1$ und $g(x_2) = y_2$.

Kurz gesagt, sei also f eine Lösung von $\int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx = \text{Min!}$.

Dann ist

$$\partial_1 L(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} (\partial_2 L(f(x), f'(x), x)) = 0$$

für $x \in [x_1, x_2]$.

Wir sagen hierzu, f erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung.

Begründung. Sei f wie oben. Sei $t : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $t(x_1) = 0$ und $t(x_2) = 0$. Sei

$$u_t(\varepsilon) := \int_{x_1}^{x_2} L(f(x) + \varepsilon \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot t'(x), x) dx .$$

Wir kürzen $\varphi(x, \varepsilon) := (f(x) + \varepsilon \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot t'(x), x)$ ab.

Es ist

$$u_t(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi(x, \varepsilon)) dx .$$

Nach Voraussetzung an f muß $u_t(0) \leq u_t(\varepsilon)$ sein für $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Also muß $u'_t(0) = 0$ sein.

Nebenrechnung: Mit der Kettenregel wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} L(\varphi(x, \varepsilon)) &= \frac{d}{d\varepsilon} L(f(x) + \varepsilon \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot t'(x), x) \\ &= \partial_1 L(f(x) + \varepsilon \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot t'(x), x) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} (f(x) + \varepsilon \cdot t(x)) \\ &\quad + \partial_2 L(f(x) + \varepsilon \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot t'(x), x) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} (f'(x) + \varepsilon \cdot t'(x)) \\ &\quad + \partial_3 L(f(x) + \varepsilon \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot t'(x), x) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} x \\ &= \partial_1 L(\varphi(x, \varepsilon)) \cdot t(x) + \partial_2 L(\varphi(x, \varepsilon)) \cdot t'(x) . \end{aligned}$$

Dank Nebenrechnung wird

$$\begin{aligned} &u'_t(\varepsilon) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi(x, \varepsilon)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\varepsilon} L(\varphi(x, \varepsilon)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \partial_1 L(\varphi(x, \varepsilon)) \cdot t(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \partial_2 L(\varphi(x, \varepsilon)) \cdot t'(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \partial_1 L(\varphi(x, \varepsilon)) \cdot t(x) dx + [\partial_2 L(\varphi(x, \varepsilon)) \cdot t(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (\partial_2 L(\varphi(x, \varepsilon))) \cdot t(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \partial_1 L(\varphi(x, \varepsilon)) \cdot t(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (\partial_2 L(\varphi(x, \varepsilon))) \cdot t(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\partial_1 L(\varphi(x, \varepsilon)) - \frac{d}{dx} (\partial_2 L(\varphi(x, \varepsilon))) \right) \cdot t(x) dx . \end{aligned}$$

Bei $\varepsilon = 0$ erhalten wir somit die notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= u'_t(0) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\partial_1 L(\varphi(x, 0)) - \frac{d}{dx} (\partial_2 L(\varphi(x, 0))) \right) \cdot t(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\partial_1 L(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} (\partial_2 L(f'(x), f(x), x)) \right) \cdot t(x) dx . \end{aligned}$$

Da dies für jede Funktion t wie oben gelten muß, folgt

$$0 = \partial_1 L(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} (\partial_2 L(f'(x), f(x), x))$$

für $x \in [x_1, x_2]$. □

Beispiel 36 Zunächst wollen wir ein Beispiel betrachten, in welchem wir auch ohne Variationsrechnung die Lösung kennen: die Strecke als kürzeste Verbindung zweier Punkte.

Seien $x_1 < x_2$ in \mathbb{R} gegeben. Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Sei eine differenzierbare Funktion $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Die Länge des Graphen von f ergibt sich zu

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx .$$

Diese Länge soll minimiert werden.

Wir stellen hierfür die Euler-Lagrange-Gleichung auf.

Es ist $L(z, w, x) = \sqrt{1 + w^2}$.

Es ist $\partial_1 L(z, w, x) = 0$. Es ist $\partial_2 L(z, w, x) = \frac{1}{2} \cdot (1 + w^2)^{-1/2} \cdot 2w = \frac{w}{\sqrt{1+w^2}}$.

Euler-Lagrange ergibt sich also folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{!}{=} \partial_1 L(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx}(\partial_2 L(f(x), f'(x), x)) \\
 &= -\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right) \\
 &= -\frac{d}{dx}(f'(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2}) \\
 &= -f''(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2} - f'(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 + f'(x)^2)^{-3/2} \cdot 2f'(x) \cdot f''(x) \\
 &= \left(-f''(x) \cdot (1 + f'(x)^2) + f'(x)^2 \cdot f''(x)\right) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-3/2} \\
 &= -f''(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-3/2}.
 \end{aligned}$$

Somit sollte $f''(x) = 0$ sein für $x \in [x_1, x_2]$.

Dies wird von

$$f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

erfüllt, also von der Funktion, deren Graph die Strecke zwischen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ist.

Beispiel 37 Wir greifen Beispiel 33 wieder auf, den Rotationskörper um die x -Achse mit minimaler Oberfläche.

Sei $x_1 < x_2$. Seien $y_1, y_2 > 0$.

Sei $L(z, w, u) := \sqrt{1 + w^2} \cdot z$.

Wir suchen die differenzierbare Funktion $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, die $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ erfüllt und

$$2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot f(x) dx$$

minimiert. Dabei kann der Faktor 2π zum Auffinden des Minimums weggelassen werden.

Es ist

$$\begin{aligned}
 \partial_1 L(z, w, x) &= \sqrt{1 + w^2} \\
 \partial_2 L(z, w, x) &= \frac{w}{\sqrt{1+w^2}} \cdot z.
 \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_1 L(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx}(\partial_2 L(f(x), f'(x), x)) \\
&= \sqrt{1 + f'(x)^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \cdot f(x) \right) \\
&= \sqrt{1 + f'(x)^2} - \frac{d}{dx} (f'(x) \cdot f(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2}) \\
&= \sqrt{1 + f'(x)^2} \\
&\quad - f''(x) \cdot f(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2} \\
&\quad - f'(x) \cdot f'(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2} \\
&\quad - f'(x) \cdot f(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-3/2} \cdot 2f'(x) \cdot f''(x) \\
&= (1 + f'(x)^2)^{-3/2} \\
&\quad \cdot ((1 + f'(x)^2)^2 \\
&\quad - f''(x) \cdot f(x) \cdot (1 + f'(x)^2) \\
&\quad - f'(x)^2 \cdot (1 + f'(x)^2) \\
&\quad + f'(x) \cdot f(x) \cdot f'(x) \cdot f''(x)) \\
&= (1 + f'(x)^2)^{-3/2} \cdot (1 + f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x)) .
\end{aligned}$$

Also sollte

$$0 = 1 + f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x)$$

sein.

Wir machen den Ansatz, eine Funktion f der Form

$$f(x) = a \cdot \cosh(bx + c) + d$$

zu suchen, für zu ermittelnde Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.

Zunächst wird

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a \cdot b \cdot \sinh(bx + c) \\
f''(x) &= a \cdot b^2 \cdot \cosh(bx + c)
\end{aligned}$$

Es soll

$$\begin{aligned}
0 &= 1 + f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x) \\
&= 1 + a^2 \cdot b^2 \cdot \sinh(bx + c)^2 - (a \cdot \cosh(bx + c) + d) \cdot a \cdot b^2 \cdot \cosh(bx + c) \\
&= 1 + a^2 \cdot b^2 \cdot \cosh(bx + c)^2 - a^2 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^2 \cosh(bx + c)^2 - d \cdot a \cdot b^2 \cdot \cosh(bx + c) \\
&= 1 - a^2 \cdot b^2 - d \cdot a \cdot b^2 \cdot \cosh(bx + c)
\end{aligned}$$

sein für $x \in [x_1, x_2]$.

Aus der Konstanz der linken Seite folgt $d = 0$. Dann folgt $a \cdot b = 1$ und also

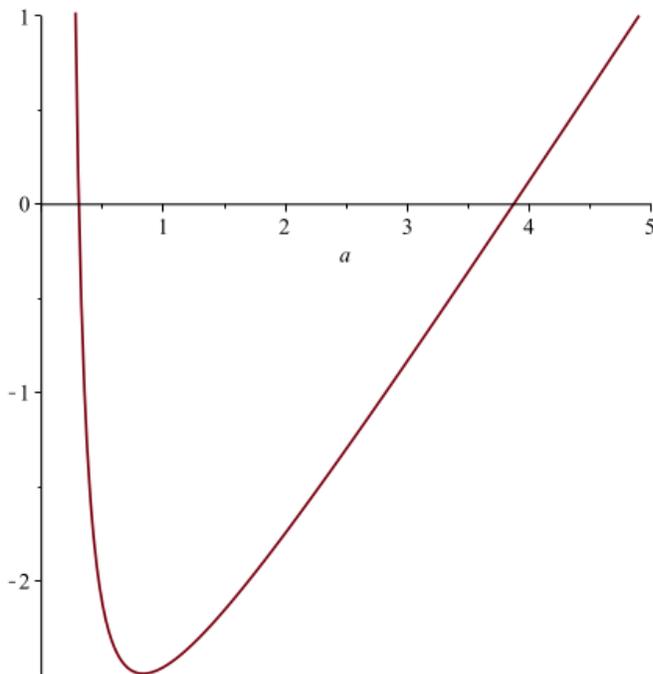
$$f(x) = a \cdot \cosh(a^{-1}x + c) .$$

Betrachten wir nun die spezielle Situation $x_1 = -1$, $x_2 = +1$, $y_1 = 4$ und $y_2 = 4$. Wir fordern also $f(-1) = 4$ und $f(+1) = 4$.

Die Symmetrie der cosh-Funktion erzwingt $c = 0$. Wir brauchen

$$4 \stackrel{!}{=} f(1) = a \cdot \cosh(a^{-1}) = \frac{a}{2}(e^{1/a} + e^{-1/a}).$$

Graphische Lösung: Wir zeichnen den Graph von $\frac{a}{2}(e^{1/a} + e^{-1/a}) - 4$ auf.



Numerische Lösungen: $a_1 \approx 0,307$ und $a_2 \approx 3,870$.

Sei entsprechend $f_1(x) := a_1 \cdot \cosh(a_1^{-1}x)$ und $f_2(x) := a_2 \cdot \cosh(a_2^{-1}x)$.

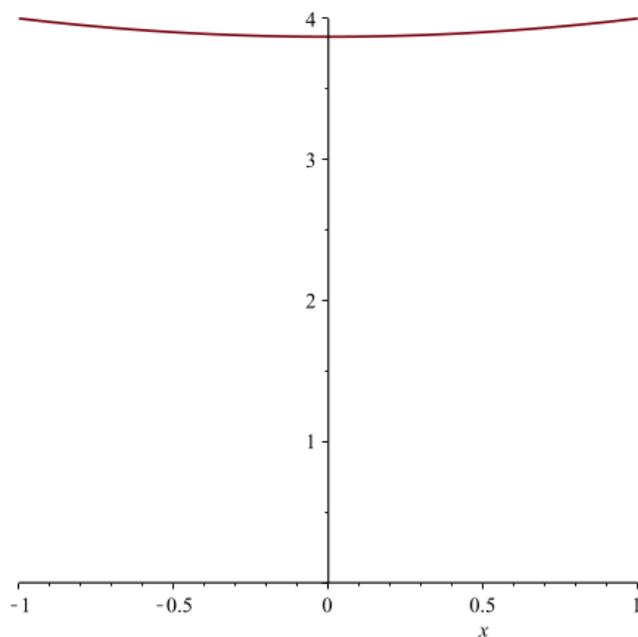
Numerisch wird

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + f_1'(x)^2} \cdot f_1(x) \, dx &\approx 102,16 \\ 2\pi \cdot \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + f_2'(x)^2} \cdot f_2(x) \, dx &\approx 49,73. \end{aligned}$$

Also wird das Minimum bei f_2 angenommen, d.h. mit der Funktion

$$f_2 : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f_2(x) := a_2 \cdot \cosh(a_2^{-1}x) \approx 3,870 \cdot \cosh(0,258 \cdot x).$$

Ihr Graph hat auf dem Intervall $[-1, 1]$ die folgende Gestalt.



Der zugehörige Rotationskörper ist also ein nur etwas verformter Zylinder.

Zum Vergleich: der Zylinder, der sich als Rotationskörper der konstanten Funktion 4 auf $[-1, +1]$ ergibt, hat Oberfläche

$$2\pi \cdot 4 \cdot 2 \approx 50,26 .$$

3.3 Das ganze mit Nebenbedingung

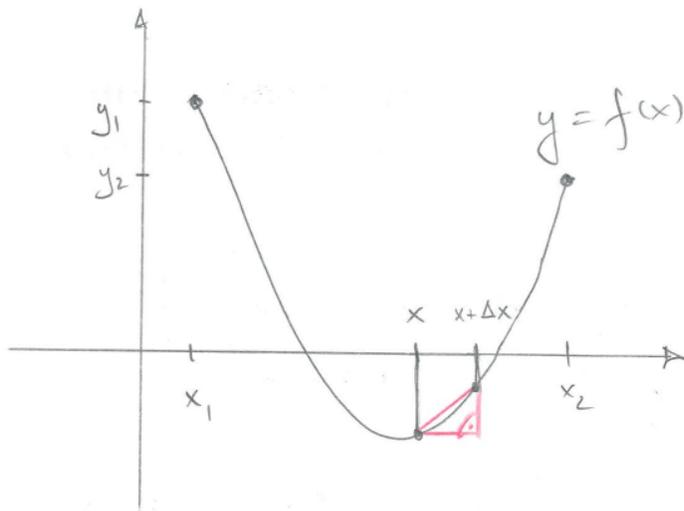
Beispiel 38 Sei $x_1 < x_2$. Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Wir wollen in einem vertikalen Gravitationsfeld eine Kette der Länge $\ell > 0$ an den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aufhängen.

Dazu gehen wir davon aus, daß der Verlauf der Kette durch den Graphen einer differenzierbaren Funktion

$$f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$$

beschrieben wird.



Sei $x \in [x_1, x_2]$. Sei Δx klein. Das Kettenstück von x bis $x + \Delta x$ hat näherungsweise die Länge

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x + \Delta x) - f(x))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Es soll also die Länge der Kette

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \ell$$

sein.

Hat die Kette eine Massendichte von ρ pro Längeneinheit, so ist ihre Masse gleich $\rho \cdot \ell$. Besagtes Kettenstück liefert den Beitrag

$$\frac{1}{\rho \cdot \ell} \cdot \rho \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \cdot f(x)$$

zur Höhe des Schwerpunkts der Kette.

Das Graviationsfeld bewirkt nun, daß die Höhe

$$\frac{1}{\ell} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot f(x) dx$$

ihres Schwerpunktes minimal wird.

Setzen wir nun $M(z, w, x) := \sqrt{1 + w^2}$ und $L(z, w, x) := \sqrt{1 + w^2} \cdot z$, so wird

$$\int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx$$

zu minimieren unter der Nebenbedingung

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} M(f(x), f'(x), x) dx .$$

Lemma 39

Sei $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (z, w, x) \mapsto L(z, w, x)$ stetig partiell differenzierbar.

Sei $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : (z, w, x) \mapsto M(z, w, x)$ stetig partiell differenzierbar. Sei $m \in \mathbb{R}$.

Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$.

Sei $f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ und mit

$$\int_{x_1}^{x_2} M(f(x), f'(x), x) dx = m .$$

Sei

$$\int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx \leq \int_{x_1}^{x_2} L(g(x), g'(x), x) dx$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x_1) = y_1$ und $g(x_2) = y_2$ und mit

$$\int_{x_1}^{x_2} M(g(x), g'(x), x) dx = m .$$

Kurz gesagt, sei also f eine Lösung von $\int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx = \text{Min!}$ unter der Nebenbedingung $\int_{x_1}^{x_2} M(f(x), f'(x), x) dx = m$.

Dann gibt es einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\partial_1(L - \lambda M)(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx}(\partial_2(L - \lambda M)(f(x), f'(x), x)) = 0$$

für $x \in [x_1, x_2]$. Hierbei haben wir $(L - \lambda M)(z, w, x) := L(z, w, x) - \lambda M(z, w, x)$ geschrieben.

Wir sagen hierzu, f erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung unter Nebenbedingung.

Begründung. Sei f wie oben. Seien $s, t : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $s(x_1) = s(x_2) = 0$ und mit $t(x_1) = t(x_2) = 0$. Sei

$$\begin{aligned} u_{s,t}(\varepsilon, \eta) &:= \int_{x_1}^{x_2} L(f(x) + \varepsilon \cdot s(x) + \eta \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot s'(x) + \eta \cdot t'(x), x) dx \\ v_{s,t}(\varepsilon, \eta) &:= \int_{x_1}^{x_2} M(f(x) + \varepsilon \cdot s(x) + \eta \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot s'(x) + \eta \cdot t'(x), x) dx . \end{aligned}$$

Wir kürzen $\varphi(x, \varepsilon, \eta) := (f(x) + \varepsilon \cdot s(x) + \eta \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot s'(x) + \eta \cdot t'(x), x)$ ab.

Es ist

$$\begin{aligned} u_{s,t}(\varepsilon, \eta) &= \int_{x_1}^{x_2} L(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) dx \\ v_{s,t}(\varepsilon, \eta) &= \int_{x_1}^{x_2} M(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) dx . \end{aligned}$$

Es soll also $u_{s,t}(\varepsilon, \eta)$ bei $(\varepsilon, \eta) = (0, 0)$ ein Minimum haben unter Nebenbedingung $v_{s,t}(\varepsilon, \eta) = m$.

Nach Lagrange für Funktionen in zwei Variablen ist hierfür notwendigerweise ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existent mit

$$\begin{aligned}\nabla u_{s,t}(0, 0) &= \lambda \nabla v_{s,t}(0, 0) \\ v_{s,t}(0, 0) &= m .\end{aligned}$$

Nebenrechnung: Mit der Kettenregel wird

$$\begin{aligned}& \frac{d}{d\varepsilon}(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}(L - \lambda M)(f(x) + \varepsilon \cdot s(x) + \eta \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot s'(x) + \eta \cdot t'(x), x) \\ &= \partial_1(L - \lambda M)(f(x) + \varepsilon \cdot s(x) + \eta \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot s'(x) + \eta \cdot t'(x), x) \cdot \frac{d}{d\varepsilon}(f(x) + \varepsilon \cdot s(x) + \eta \cdot t(x)) \\ & \quad + \partial_2(L - \lambda M)(f(x) + \varepsilon \cdot s(x) + \eta \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot s'(x) + \eta \cdot t'(x), x) \cdot \frac{d}{d\varepsilon}(f'(x) + \varepsilon \cdot s'(x) + \eta \cdot t'(x)) \\ & \quad + \partial_3(L - \lambda M)(f(x) + \varepsilon \cdot s(x) + \eta \cdot t(x), f'(x) + \varepsilon \cdot s'(x) + \eta \cdot t'(x), x) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} x \\ &= \partial_1(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) \cdot s(x) + \partial_2(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) \cdot s'(x) .\end{aligned}$$

Dank Nebenrechnung wird

$$\begin{aligned}& \frac{d}{d\varepsilon}(u_{s,t} - \lambda v_{s,t})(\varepsilon, \eta) \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^{x_2} (L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\varepsilon} (L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \partial_1(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) \cdot s(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \partial_2(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) \cdot s'(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \partial_1(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) \cdot s(x) dx \\ & \quad + [\partial_2(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) \cdot s(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (\partial_2(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta))) \cdot s(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \partial_1(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) \cdot s(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} (\partial_2(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta))) \cdot s(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (\partial_1(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)) - \frac{d}{dx} (\partial_2(L - \lambda M)(\varphi(x, \varepsilon, \eta)))) \cdot s(x) dx .\end{aligned}$$

Bei $(\varepsilon, \eta) = (0, 0)$ erhalten wir somit die notwendige Bedingung

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{d\varepsilon}(u_{s,t} - \lambda v_{s,t})(0, 0) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (\partial_1(L - \lambda M)(\varphi(x, 0, 0)) - \frac{d}{dx} (\partial_2(L - \lambda M)(\varphi(x, 0, 0)))) \cdot s(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (\partial_1(L - \lambda M)(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} (\partial_2(L - \lambda M)(f'(x), f(x), x))) \cdot s(x) dx .\end{aligned}$$

Da dies für jede Funktion s wie oben gelten muß, folgt

$$0 = \partial_1(L - \lambda M)(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} (\partial_2(L - \lambda M)(f'(x), f(x), x))$$

für $x \in [x_1, x_2]$.

Dies kann man auch noch umschreiben zu

$$\partial_1 L(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} (\partial_2 L(f'(x), f(x), x)) = \lambda \cdot (\partial_1 M(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx} (\partial_2 M(f'(x), f(x), x))) .$$

Da weder L noch M von s und t abhängen, folgt, daß auch λ von den betrachteten Funktionen s und t unabhängig ist. \square

Beispiel 40 Wir greifen Beispiel 38 wieder auf.

Dort war $x_1 < x_2$ und $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Wir wollen in einem vertikalen Gravitationsfeld eine Kette der Länge $\ell > 0$ an den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aufhängen.

Es war mit $M(z, w, x) := \sqrt{1 + w^2}$ und $L(z, w, x) := \sqrt{1 + w^2} \cdot z$ das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} L(f(x), f'(x), x) dx$$

zu minimieren unter der Nebenbedingung

$$\ell = \int_{x_1}^{x_2} M(f(x), f'(x), x) dx .$$

Es ist

$$(L - \lambda M)(z, w, x) = \sqrt{1 + w^2} \cdot (z - \lambda) .$$

Also ist

$$\begin{aligned} \partial_1(L - \lambda M)(z, w, x) &= \sqrt{1 + w^2} \\ \partial_2(L - \lambda M)(z, w, x) &= (z - \lambda) \cdot \frac{w}{\sqrt{1 + w^2}} . \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1(L - \lambda M)(f(x), f'(x), x) - \frac{d}{dx}(\partial_2(L - \lambda M)(f'(x), f(x), x)) \\ &= (1 + f'(x)^2)^{1/2} - \frac{d}{dx}((f(x) - \lambda) \cdot f'(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2}) \\ &= (1 + f'(x)^2)^{1/2} \\ &\quad - f'(x) \cdot f'(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2} \\ &\quad - (f(x) - \lambda) \cdot f''(x) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-1/2} \\ &\quad - (f(x) - \lambda) \cdot f'(x) \cdot (-1/2) \cdot (1 + f'(x)^2)^{-3/2} \cdot 2f'(x) \cdot f''(x) \\ &= (1 + f'(x)^2)^{-3/2} \\ &\quad \cdot ((1 + f'(x)^2)^2 \\ &\quad - f'(x)^2(1 + f'(x)^2) \\ &\quad - (f(x) - \lambda) \cdot f''(x) \cdot (1 + f'(x)^2) \\ &\quad + (f(x) - \lambda) \cdot f'(x)^2 \cdot f''(x)) \\ &= (1 + f'(x)^2)^{-3/2} \cdot (1 + f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x) + \lambda \cdot f''(x)) . \end{aligned}$$

zu erfüllen, für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die Rechnung ist zufällig also ganz ähnlich der in Beispiel 37.

Notwendig ist es also, ein konstantes $\lambda \in \mathbb{R}$ so zu finden, daß für $x \in [x_1, x_2]$ sich

$$0 \stackrel{!}{=} 1 + f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x) + \lambda \cdot f''(x)$$

ergibt.

1. *Versuch.* Es wird gerne vermutet, daß die Parabel, die durch $y = x^2$ beschrieben wird, eine Lösungskurve darstellt. Dies wollen wir überprüfen.

Sei also $f(x) := x^2$.

Es wird

$$1 + f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x) + \lambda \cdot f''(x) = 1 + 4x^2 - 2x^2 + \lambda \cdot 2 = 1 + 2x^2 + \lambda \cdot 2.$$

Da $1 + 2x^2$ nicht konstant ist, ist dies für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant gleich 0.

Also ist die betrachtete Parabel **keine** Lösungskurve.

2. *Versuch.* Wir setzen an mit $f(x) = a \cosh(bx + c) + d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $b \geq 0$.

Es wird

$$\begin{aligned} f'(x) &= ab \sinh(bx + c) \\ f''(x) &= ab^2 \cosh(bx + c). \end{aligned}$$

Es wird

$$\begin{aligned} &1 + f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x) + \lambda \cdot f''(x) \\ &= 1 + a^2 b^2 \sinh^2(bx + c) - (a \cosh(bx + c) + d) \cdot ab^2 \cosh(bx + c) + \lambda \cdot ab^2 \cosh(bx + c) \\ &= 1 + a^2 b^2 \sinh^2(bx + c) - (a \cosh(bx + c) + d) \cdot ab^2 \cosh(bx + c) + \lambda \cdot ab^2 \cosh(bx + c) \\ &= 1 - a^2 b^2 + (\lambda - d) \cdot ab^2 \cosh(bx + c). \end{aligned}$$

Folglich ist die Bedingung mit der Wahl $\lambda = d$ erfüllt, falls $a^2 b^2 = 1$, i.e. $b > 0$ und $a = b^{-1}$.

Das liefert als Lösung $f(x) = b^{-1} \cosh(bx + c) + d$.

Die Nebenbedingung verlangt nun

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{x_1}^{x_2} M(f(x), f'(x), x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \sinh^2(bx + c)} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \cosh(bx + c) dx \\ &= [b^{-1} \sinh(bx + c)]_{x_1}^{x_2}. \end{aligned}$$

Daraus, sowie aus $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$, sind nun die Parameter zu ermitteln.

Betrachten wir einmal den Spezialfall $x_1 := -1$, $x_2 := 1$ und $y_1 := 0$, $y_2 := 0$. Sei zudem $\ell := e - e^{-1} \approx 2,35$.

Es ist $b^{-1} \cosh(-b+c) + d = f(-1) = 0 = f(1) = b^{-1} \cosh(b+c) + d$. Es folgt $\cosh(-b+c) = \cosh(b+c)$.

Wäre $c > 0$, so auch $|-b + c| < |b + c|$ und also $\cosh(-b + c) < \cosh(b + c)$, was nicht zutrifft.

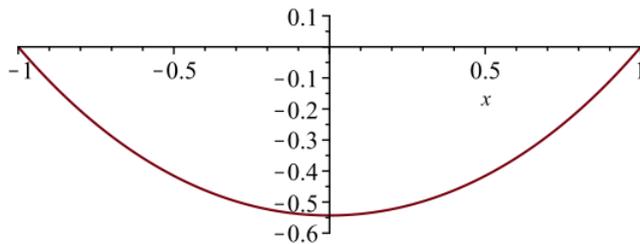
Wäre $c < 0$, so auch $|-b + c| > |b + c|$ und also $\cosh(-b + c) > \cosh(b + c)$, was nicht zutrifft.

Also ist $c = 0$.

Die Bedingung $e - e^{-1} = \ell = b^{-1} \sinh(-b) - b^{-1} \sinh(b) = 2b^{-1} \sinh(b) = b^{-1}(e^b - e^{-b})$ ist mit $b = 1$ erfüllt.

Schließlich muß noch $f(1) = \cosh(1) + d = 0$ sein, also $d = -\cosh(1)$.

Also ist $f(x) = \cosh(x) - \cosh(1)$.



3.4 Das ganze parametrisiert

Sei $n \geq 1$. Wir betrachten eine stetig partiell differenzierbare Funktion $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (z, w, t) \mapsto L(z, w, t)$.

Es ist also $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$.

Ausführlich geschrieben ist damit $L(z, w, t) = L(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n, t)$.

Für $1 \leq k \leq n$ schreiben wir

$$\partial_{1,k} L(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n, t) := \frac{d}{dz_k} L(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n, t)$$

und

$$\partial_{2,k} L(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n, t) := \frac{d}{dw_k} L(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n, t).$$

Ferner ist

$$\partial_3 L(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n, t) := \frac{d}{dt} L(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n, t).$$

Lemma 41

Sei $n \geq 1$. Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (z, w, t) \mapsto L(z, w, t)$ stetig partiell differenzierbar.

Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $t_1 < t_2$. Seien $p, q \in \mathbb{R}^n$.

Sei $C : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $C(t_1) = p$ und $C(t_2) = q$.

Sei

$$\int_{t_1}^{t_2} L(C(t), C'(t), t) dt \leq \int_{t_1}^{t_2} L(D(t), D'(t), t) dt$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $D : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D(t_1) = p$ und $D(t_2) = q$.

Kurz gesagt, sei also C eine Lösung von $\int_{t_1}^{t_2} L(C(t), C'(t), t) dt = \text{Min!}$.

Für jedes $1 \leq k \leq n$ ist dann

$$\partial_{1,k} L(C(t), C'(t), t) - \frac{d}{dt} (\partial_{2,k} L(C(t), C'(t), t)) = 0$$

für $t \in [t_1, t_2]$.

Wir sagen hierzu, C erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichungen.

Begründung. Sei C wie oben.

Sei $S : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $S(t_1) = 0$ und $S(t_2) = 0$. Sei

$$u_S(\varepsilon) := \int_{t_1}^{t_2} L(C(t) + \varepsilon \cdot S(t), C'(t) + \varepsilon \cdot S'(t), t) dt .$$

Wir kürzen $\varphi(t, \varepsilon) := (C(t) + \varepsilon \cdot S(t), C'(t) + \varepsilon \cdot S'(t), t)$ ab.

Es ist

$$u_S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(\varphi(t, \varepsilon)) dt .$$

Nach Voraussetzung an C muß $u_S(0) \leq u_S(\varepsilon)$ sein für $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Also muß $u'_S(0) = 0$ sein.

Wir schreiben $C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix}$ und $S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) \\ \vdots \\ S_n(t) \end{pmatrix}$.

Nebenrechnung: Mit der Kettenregel wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} L(\varphi(t, \varepsilon)) &= \frac{d}{d\varepsilon} L(C(t) + \varepsilon \cdot S(t), C'(t) + \varepsilon \cdot S'(t), t) \\ &= \sum_{k=1}^n \partial_{1,k} L(C(t) + \varepsilon \cdot S(t), C'(t) + \varepsilon \cdot S'(t), t) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} (C_k(t) + \varepsilon \cdot S_k(t)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \partial_{2,k} L(C(t) + \varepsilon \cdot S(t), C'(t) + \varepsilon \cdot S'(t), t) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} (C'_k(t) + \varepsilon \cdot S'_k(t)) \\ &\quad + \partial_3 L(C(t) + \varepsilon \cdot S(t), C'(t) + \varepsilon \cdot S'(t), t) \cdot \frac{d}{d\varepsilon} t \\ &= \sum_{k=1}^n \partial_{1,k} L(\varphi(t, \varepsilon)) \cdot S_k(t) + \partial_{2,k} L(\varphi(t, \varepsilon)) \cdot S'_k(t) . \end{aligned}$$

Dank Nebenrechnung wird

$$\begin{aligned}
& u'_S(\varepsilon) \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} L(\varphi(t, \varepsilon)) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varepsilon} L(\varphi(t, \varepsilon)) dt \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \partial_{1,k} L(\varphi(t, \varepsilon)) \cdot S_k(t) + \partial_{2,k} L(\varphi(t, \varepsilon)) \cdot S'_k(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \partial_{1,k} L(\varphi(t, \varepsilon)) \cdot S_k(t) dt + [\partial_{2,k} L(\varphi(t, \varepsilon)) \cdot S_k(t)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\partial_{2,k} L(\varphi(t, \varepsilon))) \cdot S_k(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \partial_{1,k} L(\varphi(t, \varepsilon)) \cdot S_k(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\partial_{2,k} L(\varphi(t, \varepsilon))) \cdot S_k(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} (\partial_{1,k} L(\varphi(t, \varepsilon)) - \frac{d}{dt} (\partial_{2,k} L(\varphi(t, \varepsilon)))) \cdot S_k(t) dt .
\end{aligned}$$

Bei $\varepsilon = 0$ erhalten wir somit die notwendige Bedingung

$$\begin{aligned}
0 &= u'_S(0) \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} (\partial_{1,k} L(\varphi(t, 0)) - \frac{d}{dt} (\partial_{2,k} L(\varphi(t, 0)))) \cdot S_k(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} (\partial_{1,k} L(C(t), C'(t), t) - \frac{d}{dt} (\partial_{2,k} L(C(t), C'(t), t))) \cdot S_k(t) dt .
\end{aligned}$$

Da dies für jede Funktion S wie oben gelten muß, folgt für jedes $1 \leq k \leq n$, daß

$$0 = \partial_{1,k} L(C(t), C'(t), t) - \frac{d}{dt} (\partial_{2,k} L(C(t), C'(t), t))$$

ist für $t \in [t_1, t_2]$. □

Beispiel 42 Wir greifen Beispiel 32 wieder auf.

Wir setzen nochmal neu an:

Gleite ein kleiner Körper der Masse m im Graviationsfeld mit Gravitationsbeschleunigung g reibungsfrei auf einer Kurve, parametrisiert durch eine stetig partiell differenzierbare Funktion $C : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t)$, wobei $t_1 < t_2$.

Der Parameter t bezeichnet hier im allgemeinen nicht die Zeit, sondern diene nur zum Parametrisieren der Kurve.

Zu Anfang befinde sich der Körper bei $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ in Ruhe.

Zu Ende befinde er sich bei $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$.

Die für die Bewegung von p nach q benötigte Zeit soll minimiert werden.

Die aktuelle kinetische Energie ist gleich der aufgewandten potentiellen Energie, also

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mg(C_2(t) - p_2) .$$

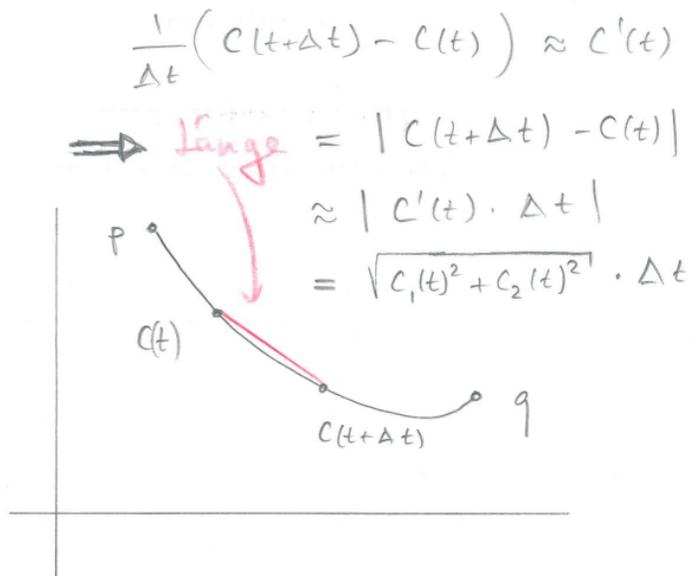
Also ist

$$v = \sqrt{2g(p_2 - C_2(t))} .$$

Für kleines Δt benötigt unser Körper die Zeit

$$\frac{|C(t + \Delta t) - C(t)|}{v},$$

um von $C(t)$ nach $C(t + \Delta t)$ zu kommen.



Somit sollte

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{C_1'(t)^2 + C_2'(t)^2}{2g(p_2 - C_2(t))}} dt = \text{Min!}$$

sein. Mit

$$L(z, w, t) = L(z_1, z_2, w_1, w_2, t) := \sqrt{\frac{w_1^2 + w_2^2}{2g(p_2 - z_2)}}.$$

sollte also

$$\int_{t_1}^{t_2} L(C(t), C'(t), t) dt = \text{Min!}$$

sein.

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\partial_{1,1}L(z, w, t) &= \frac{d}{dz_1}L(z, w, t) \\
&= 0 \\
\partial_{1,2}L(z, w, t) &= \frac{d}{dz_2}L(z, w, t) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{w_1^2 + w_2^2}{2g(p_2 - z_2)} \right)^{-1/2} \cdot \frac{w_1^2 + w_2^2}{2g} \cdot \frac{1}{(p_2 - z_2)^2} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot (p_2 - z_2)^{-3/2} \cdot (w_1^2 + w_2^2)^{1/2} \\
\partial_{2,1}L(z, w, t) &= \frac{d}{dw_1}L(z, w, t) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{w_1^2 + w_2^2}{2g(p_2 - z_2)} \right)^{-1/2} \cdot \frac{2w_1}{2g(p_2 - z_2)} \\
&= w_1 \cdot (w_1^2 + w_2^2)^{-1/2} \cdot (2g(p_2 - z_2))^{-1/2} \\
\partial_{2,2}L(z, w, t) &= \frac{d}{dw_2}L(z, w, t) \\
&= w_2 \cdot (w_1^2 + w_2^2)^{-1/2} \cdot (2g(p_2 - z_2))^{-1/2}
\end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_{1,1}L(C(t), C'(t), t) - \frac{d}{dt}(\partial_{2,1}L(C(t), C'(t), t)) \\
0 &= \partial_{1,2}L(C(t), C'(t), t) - \frac{d}{dt}(\partial_{2,2}L(C(t), C'(t), t))
\end{aligned}$$

werden also zu

$$\begin{aligned}
0 &= 0 - \frac{d}{dt}(C_1'(t) \cdot (C_1'(t)^2 + C_2'(t)^2)^{-1/2} \cdot (2g(p_2 - C_2(t)))^{-1/2}) \\
0 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot (p_2 - C_2(t))^{-3/2} \cdot (C_1'(t)^2 + C_2'(t)^2)^{1/2} \\
&\quad - \frac{d}{dt}(C_2'(t) \cdot (C_1'(t)^2 + C_2'(t)^2)^{-1/2} \cdot (2g(p_2 - C_2(t)))^{-1/2}) .
\end{aligned}$$

Wir legen nun den Ursprung unseres Koordinatensystems in den Startpunkt der Masse, i.e. wir setzen $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Man beachte, daß dann wegen Energieerhaltungssatz immer $C_2(t) < 0$ zu sein hat. Insbesondere sollte auch $q_2 < 0$ sein.

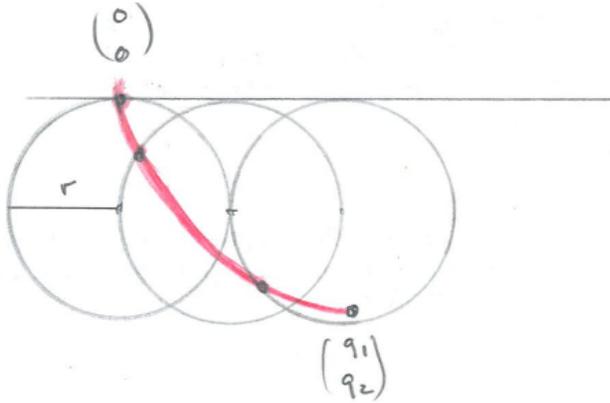
Die Gleichungen werden so zu

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}(C_1'(t) \cdot (C_1'(t)^2 + C_2'(t)^2)^{-1/2} \cdot (-C_2(t))^{-1/2}) \\
0 &= \frac{1}{2}(-C_2(t))^{-3/2} \cdot (C_1'(t)^2 + C_2'(t)^2)^{1/2} \\
&\quad - \frac{d}{dt}(C_2'(t) \cdot (C_1'(t)^2 + C_2'(t)^2)^{-1/2} \cdot (-C_2(t))^{-1/2}) .
\end{aligned}$$

Was wegen der ersten Gleichung schonmal nicht geht, ist, $C(t)$ so zu wählen, daß $C'(t)$ konstant ist, $C_2(t)$ aber nicht.

Wir machen den Ansatz, einen Punkt auf einem Rad zu markieren und dieses Rad unterhalb der horizontalen Achse zu rollen. Die Kurve, die dieser Punkt beschreibt, eine

sogenannte Brachistochrone, wollen wir dann daraufhin untersuchen, ob sie unser Problem löst.



Sei t der Winkel, um den sich das Rad gedreht hat, in Bogenmaß, angefangen bei $t_1 = 0$.

Dann vollführt unser Punkt eine Kreisbewegung um einen Mittelpunkt in Höhe $-r$, also $r \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}$, überlagert von einer Translation, also $\begin{pmatrix} tr \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit wird

$$C(t) = r \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tr \\ -r \end{pmatrix} .$$

Zunächst wird

$$C'(t) = r \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zur ersten Gleichung. Es wird

$$\begin{aligned} & C'_1(t) \cdot (C'_1(t)^2 + C'_2(t)^2)^{-1/2} \cdot (-C_2(t))^{-1/2} \\ &= r(1 - \cos(t)) \cdot (r^2(1 - \cos(t))^2 + r^2 \sin(t)^2)^{-1/2} \cdot (r(1 - \cos(t)))^{-1/2} \\ &= r^{-1/2} \cdot (1 - \cos(t))^{1/2} \cdot (1 - 2 \cos(t) + \cos(t)^2 + \sin(t)^2)^{-1/2} \\ &= r^{-1/2} \cdot 2^{-1/2} , \end{aligned}$$

was in der Tat konstant in t ist.

Zur zweiten Gleichung. Es wird

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(-C_2(t))^{-3/2} \cdot (C'_1(t)^2 + C'_2(t)^2)^{1/2} \\ & - \frac{d}{dt} (C'_2(t) \cdot (C'_1(t)^2 + C'_2(t)^2)^{-1/2} \cdot (-C_2(t))^{-1/2}) \\ &= \frac{1}{2}(r(1 - \cos(t)))^{-3/2} \cdot (r^2(1 - \cos(t))^2 + r^2 \sin(t)^2)^{1/2} \\ & - \frac{d}{dt} (-r \sin(t) \cdot (r^2(1 - \cos(t))^2 + r^2 \sin(t)^2)^{-1/2} \cdot (r(1 - \cos(t)))^{-1/2}) \\ &= \frac{1}{2}r^{-1/2}(1 - \cos(t))^{-3/2} \cdot (2 - 2 \cos(t))^{1/2} \\ & + r^{-1/2} \frac{d}{dt} (\sin(t) \cdot (2 - 2 \cos(t))^{-1/2} \cdot (1 - \cos(t))^{-1/2}) \\ &= 2^{-1/2}r^{-1/2}(1 - \cos(t))^{-1} \\ & + 2^{-1/2}r^{-1/2} \frac{d}{dt} (\sin(t) \cdot (1 - \cos(t))^{-1}) . \end{aligned}$$

Es sollte also

$$\frac{d}{dt}(\sin(t) \cdot (1 - \cos(t))^{-1}) \stackrel{!}{=} -(1 - \cos(t))^{-1}$$

sein. In der Tat wird

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\sin(t) \cdot (1 - \cos(t))^{-1}) \\ &= \cos(t) \cdot (1 - \cos(t))^{-1} + \sin(t) \cdot (-1) \cdot (1 - \cos(t))^{-2} \cdot \sin(t) \\ &= (1 - \cos(t))^{-2} \cdot (\cos(t) \cdot (1 - \cos(t)) - \sin(t)^2) \\ &= (1 - \cos(t))^{-2} \cdot (\cos(t) - 1) \\ &= -(1 - \cos(t))^{-1} . \end{aligned}$$

Die Bedingung, daß $C(t_2) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ sein soll, muß nun den Parameterwert t_2 und den Radius r liefern.

Es wird

$$C(t_2) = r \begin{pmatrix} -\sin(t_2) \\ \cos(t_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 r \\ -r \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} .$$

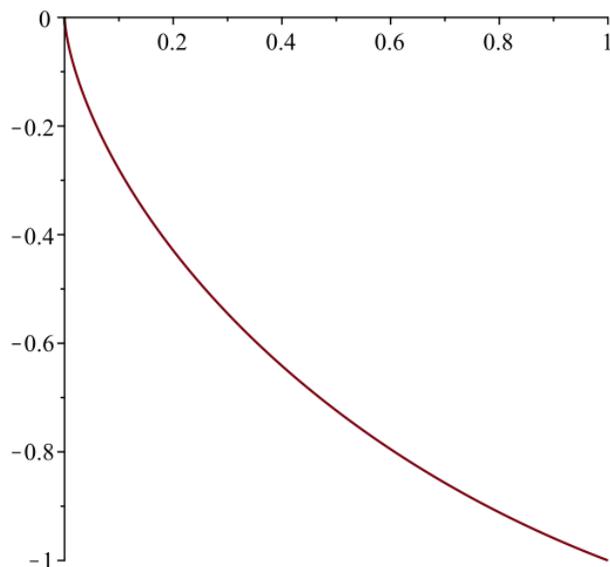
Daher muß

$$\frac{-\sin(t_2) + t_2}{\cos(t_2) - 1} = \frac{q_1}{q_2}$$

sein. Daraus läßt sich t_2 numerisch ermitteln. Sodann wird $r = \frac{q_2}{\cos(t_2) - 1}$.

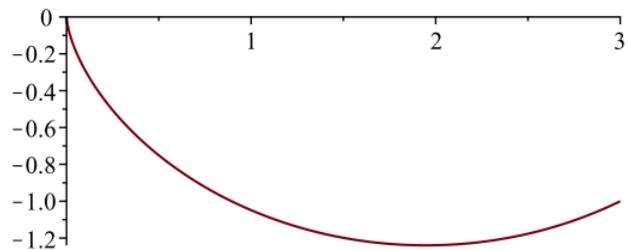
Sei zum einen z.B. $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Numerisch ergibt sich $t_2 \approx 2,412$ und $r \approx 0,573$. Unsere Parametrisierung C gibt folgende Kurve.



Sei zum anderen z.B. $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Numerisch ergibt sich $t_2 \approx 4,052$ und $r \approx 0,620$. Unsere Parametrisierung C gibt folgende Kurve.



Man beachte, daß diesenfalls die Kurve, die die Durchlaufdauer minimiert, teilweise **unterhalb** des Endpunktes $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ verläuft.

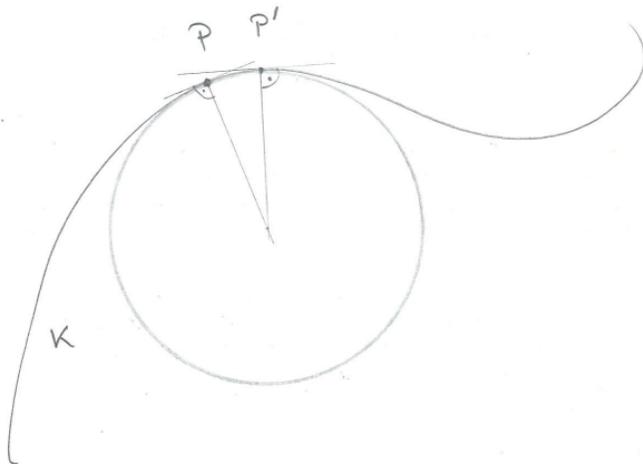
Kapitel 4

Krümmungskreise

4.1 Problemstellung

Plan 43 Sei eine Kurve K gegeben. Sei ein Punkt $P \in K$ gegeben.

Wir suchen den Kreis durch P , der K optimal approximiert.



Mit anderen Worten, wir suchen den Schnittpunkt zweier Normalen, eine durch P , eine durch einen Punkt P' nahe bei P , im Grenzfall $P' \rightarrow P$.

Wir werden zwei Fälle untersuchen.

Zum einen betrachten wir eine parametrisierte Kurve.

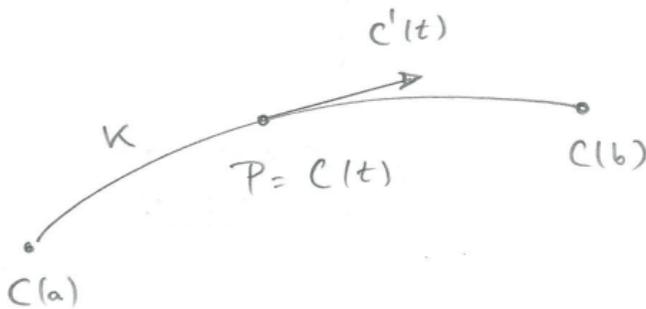
Zum anderen betrachten wir eine Kurve, die als Nullstellenmenge einer Funktion in zwei Variablen gegeben ist.

4.2 Parametrisierte Kurven

Lemma 44 Sei $a < b$.

Sei $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$ eine Parametrisierung einer Kurve K .

Sei dabei C zweimal stetig differenzierbar mit $C'(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$.



Dann ist der Krümmungskreisradius bei $C(t)$ gleich

$$r(t) := \frac{|C'(t)|^3}{|C'_1(t) \cdot C''_2(t) - C'_2(t) \cdot C''_1(t)|}.$$

Falls der Nenner verschwindet, dann sei $r(t) = +\infty$.

Der Krümmungskreismittelpunkt bei $C(t)$ ist

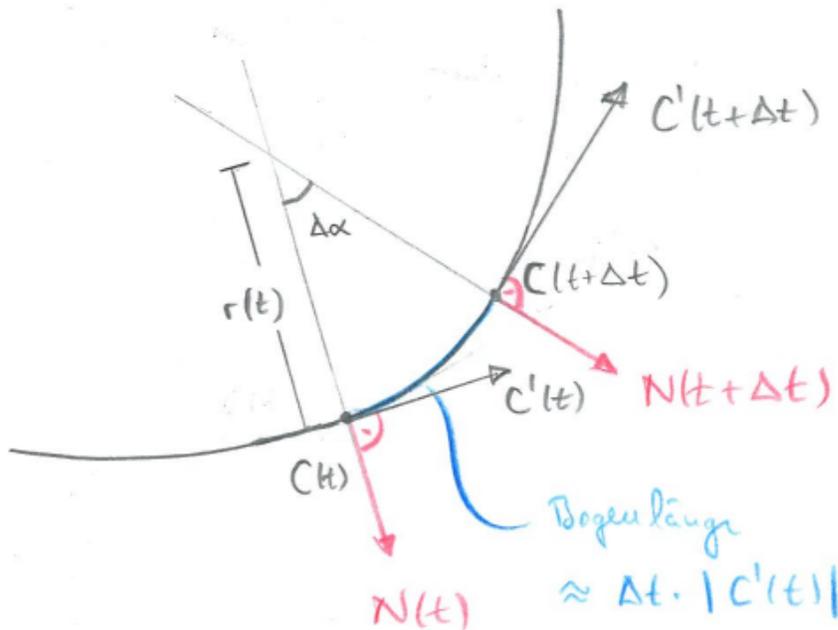
$$M(t) := \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} - \frac{|C'(t)|^2}{C'_1(t) \cdot C''_2(t) - C'_2(t) \cdot C''_1(t)} \cdot \begin{pmatrix} C'_2(t) \\ -C'_1(t) \end{pmatrix}.$$

Die durch $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto M(t)$ parametrisierte Kurve heißt Evolute von K .

Begründung. Wir haben in $C(t)$ den Normalenvektor

$$N(t) := \frac{1}{|C'(t)|} \begin{pmatrix} C'_2(t) \\ -C'_1(t) \end{pmatrix},$$

der in Parametrisierungsrichtung, d.h. mit wachsendem t , nach rechts zeigt und Länge 1 hat.



Für kleines positives Δt ist nun zum einen $\Delta\alpha \approx |N(t + \Delta t) - N(t)| \approx |N'(t)| \cdot \Delta t$.

Zum anderen ist $\Delta\alpha \cdot r(t) \approx |C(t + \Delta t) - C(t)| \approx |C'(t)| \cdot \Delta t$.

Also ist $|N'(t)| \cdot \Delta t \cdot r(t) \approx |C'(t)| \cdot \Delta t$, mithin $|N'(t)| \cdot r(t) \approx |C'(t)|$.

Für $\Delta t \rightarrow 0$ wird daraus

$$r(t) = \frac{|C'(t)|}{|N'(t)|}.$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|C'(t)| &= \frac{d}{dt}(C_1'(t)^2 + C_2'(t)^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(C_1'(t)^2 + C_2'(t)^2)^{-1/2} \cdot (2C_1'(t)C_1''(t) + 2C_2'(t)C_2''(t)) \\ &= \frac{\langle C'(t)|C''(t) \rangle}{|C'(t)|}. \end{aligned}$$

Somit wird

$$\begin{aligned} N'(t) &= \frac{d}{dt}(|C'(t)|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix}) \\ &= -|C'(t)|^{-2} \cdot \frac{\langle C'(t)|C''(t) \rangle}{|C'(t)|} \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} + |C'(t)|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_2''(t) \\ -C_1''(t) \end{pmatrix} \\ &= -|C'(t)|^{-3} \cdot \langle C'(t)|C''(t) \rangle \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} + |C'(t)|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_2''(t) \\ -C_1''(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies erlaubt folgende Beobachtung.

$$\begin{aligned}\langle N'(t)|N(t)\rangle &= -|C'(t)|^{-4} \cdot \langle C'(t)|C''(t)\rangle \cdot \left\langle \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \right\rangle + |C'(t)|^{-2} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} C_2''(t) \\ -C_1''(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -|C'(t)|^{-2} \cdot \langle C'(t)|C''(t)\rangle + |C'(t)|^{-2} \cdot \langle C'(t)|C''(t)\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Diese Beobachtung läßt sich auch geometrisch erklären, da $N'(t)$ tangential zum Kreis mit Radius 1 zu liegen hat, auf welchem sich der Punkt mit Ortsvektor $N(t)$ befindet.

Also spannt $|N'(t)|$ dieselbe Gerade auf wie $|C'(t)|$. Somit können wir

$$|N'(t)| = |\langle N'(t) | |C'(t)|^{-1} \cdot C'(t) \rangle|$$

ansetzen. Wenn wir das oben berechnete $N'(t)$ einsetzen, dann liefert der erste Summand keinen Beitrag. Der verbleibende zweite Summand liefert

$$|N'(t)| = |\langle |C'(t)|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} C_2''(t) \\ -C_1''(t) \end{pmatrix} | |C'(t)|^{-1} \cdot C'(t) \rangle| = \frac{|C_1'(t) \cdot C_2''(t) - C_2'(t) \cdot C_1''(t)|}{|C'(t)|^2}$$

Also wird

$$r(t) = \frac{|C'(t)|}{|N'(t)|} = \frac{|C'(t)|^3}{|C_1'(t) \cdot C_2''(t) - C_2'(t) \cdot C_1''(t)|}.$$

Obiger Skizze entnimmt man, daß die Kurve sich genau dann in Parametrisierungsrichtung nach links dreht, wenn $\langle N'(t)|C'(t)\rangle > 0$ ist, i.e. wenn $C_1'(t) \cdot C_2''(t) - C_2'(t) \cdot C_1''(t) > 0$ ist.

Da $-N(t)$ in Parametrisierungsrichtung nach links zeigt, erhalten wir als Ortsvektor des Krümmungskreismittelpunkts

$$\begin{aligned}M(t) &= \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} + (-N(t)) \cdot \frac{|C'(t)|^3}{C_1'(t) \cdot C_2''(t) - C_2'(t) \cdot C_1''(t)} \\ &= \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} - \frac{|C'(t)|^2}{C_1'(t) \cdot C_2''(t) - C_2'(t) \cdot C_1''(t)} \cdot \begin{pmatrix} C_2'(t) \\ -C_1'(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 45 Wir parametrisieren eine Parabel mit

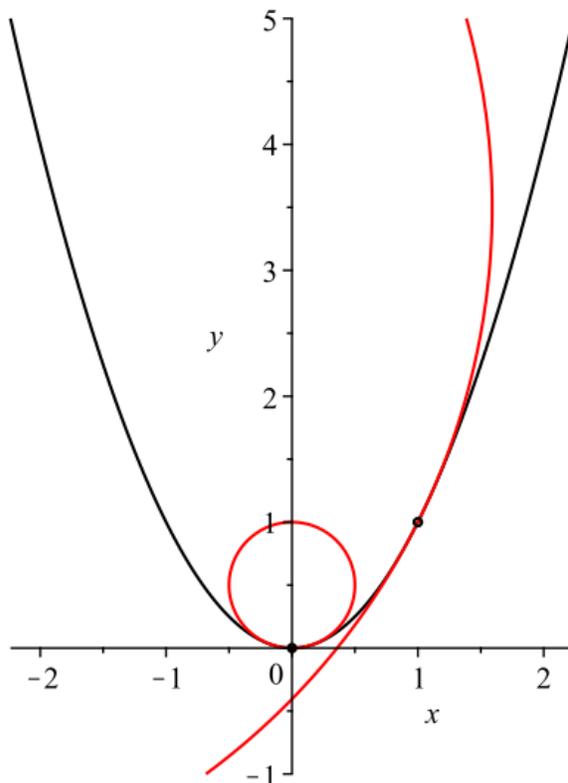
$$C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ und $C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten

$$r(t) = \frac{|C'(t)|^3}{|C_1'(t) \cdot C_2''(t) - C_2'(t) \cdot C_1''(t)|} = \frac{(1 + 4t^2)^{3/2}}{|1 \cdot 2 - 2t \cdot 0|} = \frac{1}{2}(1 + 4t^2)^{3/2}.$$

Insbesondere wird $r(0) = \frac{1}{2}$ und $r(1) = \frac{1}{2} \cdot 5^{3/2} \approx 5,59$.



Beispiel 46 Wir parametrisieren eine Ellipse mit den Halbachsen $a, b > 0$ mittels

$$C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) := \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}.$$

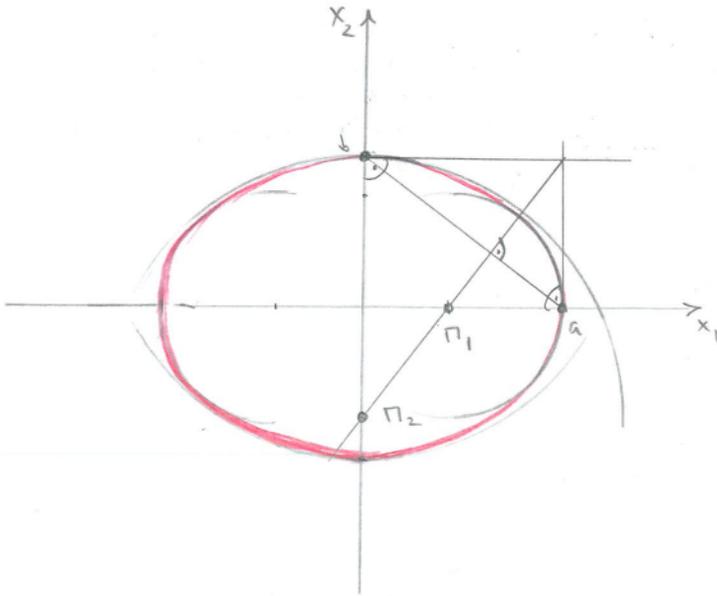
Also ist $C'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix}$ und $C''(t) = \begin{pmatrix} -a \cos(t) \\ -b \sin(t) \end{pmatrix}$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{|C'(t)|^3}{|C'_1(t) \cdot C''_2(t) - C'_2(t) \cdot C''_1(t)|} \\ &= \frac{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}{|(-a \sin(t))(-b \sin(t)) - (b \cos(t))(-a \cos(t))|} \\ &= \frac{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}{ab}. \end{aligned}$$

Insbesondere wird $r(0) = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}$ und $r(\pi/2) = \frac{a^3}{ab} = \frac{a^2}{b}$.

Dies erlaubt nun folgende zeichnerische Konstruktion einer Ellipse, indem zuerst die Krümmungskreise angedeutet werden und dann die Ellipse hineininterpoliert wird.



Der Strahlensatz gibt $b \cdot \frac{b}{a}$ als Abstand von M_1 und dem Scheitelpunkt $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ rechts. Somit ist M_1 der Mittelpunkt des Krümmungskreises dieses Scheitelpunkts.

Der Strahlensatz gibt $a \cdot \frac{a}{b}$ als Abstand von M_2 und dem Scheitelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ oben. Somit ist M_2 der Mittelpunkt des Krümmungskreises dieses Scheitelpunkts.

Beispiel 47 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.

Wir parametrisieren ihren Graphen mit

$$C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto C(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Also ist $C'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$ und $C''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(t) \end{pmatrix}$.

Wir erhalten

$$r(t) = \frac{|C'(t)|^3}{|C'_1(t) \cdot C''_2(t) - C'_2(t) \cdot C''_1(t)|} = \frac{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}{|1 \cdot f''(t) - f'(t) \cdot 0|} = (1 + f'(t))^{3/2} \cdot |f''(t)|^{-1}.$$

In üblichen Bezeichnungen ist also

$$r(x) = (1 + f'(x))^{3/2} \cdot |f''(x)|^{-1}$$

der Krümmungsradius am Punkt $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ des Graphen von f .

4.3 Implizit gegebene Kurven

Lemma 48 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar.

Sei die Kurve

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0 \right\}$$

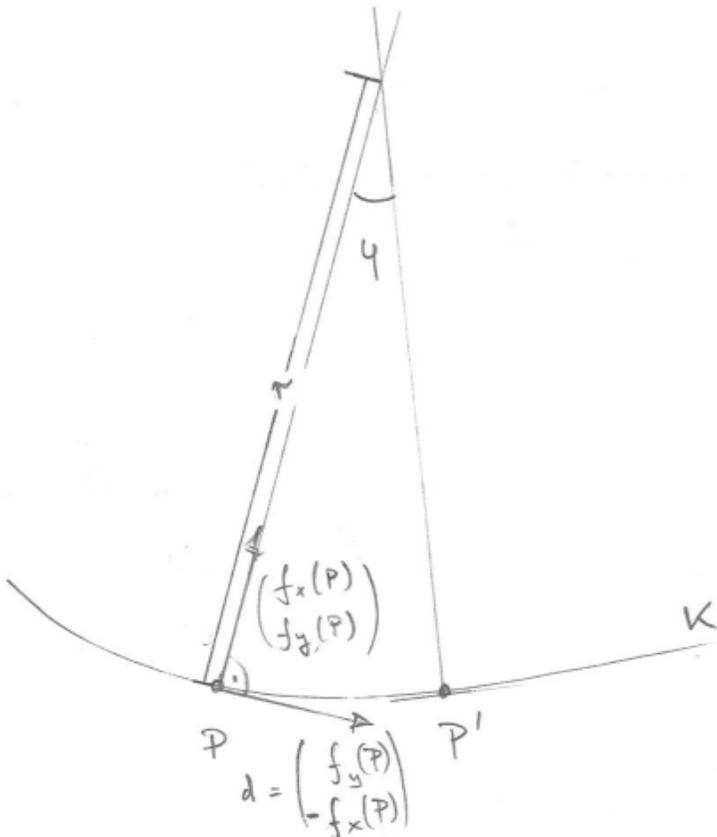
zu betrachten.

Sei dabei $\nabla f(x, y) \neq 0$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K$.

Dann ist bei $P \in K$ der Krümmungsradius $r \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ gegeben durch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(f_x(P)^2 + f_y(P)^2)^{3/2}} \cdot \left| \begin{pmatrix} f_y(P) & -f_x(P) \end{pmatrix} \cdot \text{Hf}(P) \cdot \begin{pmatrix} f_y(P) \\ -f_x(P) \end{pmatrix} \right|.$$

Begründung. Wir schreiben $d := \begin{pmatrix} f_y(P) \\ -f_x(P) \end{pmatrix}$.



Für $h \in \mathbb{R}$ mit $|h|$ klein erreichen wir näherungsweise einen Punkt P' auf der Kurve durch $P' \approx P + hd$.

Der Winkel φ ergibt sich dann näherungsweise als

$$\varphi \approx \overline{PP'} \cdot r^{-1} \approx |h| \cdot |d| \cdot r^{-1}.$$

Taylor erster Stufe gibt

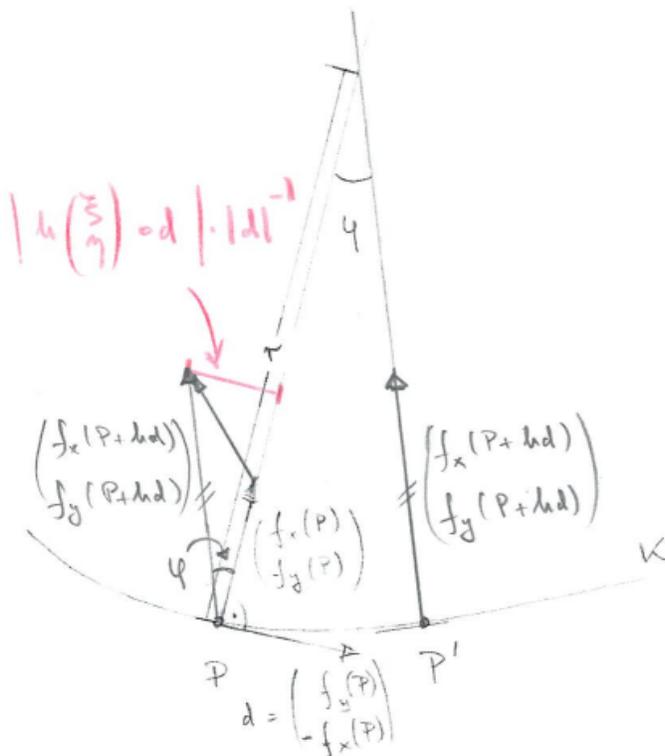
$$\begin{aligned} f_x(P + hd) &\approx f_x(P) + \nabla(f_x)(P) \bullet hd \\ f_y(P + hd) &\approx f_y(P) + \nabla(f_y)(P) \bullet hd. \end{aligned}$$

Wir schreiben $\xi := \nabla(f_x)(P) \bullet d$ und $\eta := \nabla(f_y)(P) \bullet d$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} f_x(P+hd) \\ f_y(P+hd) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x(P) \\ f_y(P) \end{pmatrix} \approx h \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Projizieren wir diese Differenz auf eine Gerade parallel zu d , so erhalten wir als Projektionslänge näherungsweise

$$|h \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \bullet d| \cdot |d|^{-1}.$$



Also ergibt sich φ auch näherungsweise als

$$\varphi \approx |h \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \bullet d| \cdot |d|^{-1} \cdot \left| \begin{pmatrix} f_x(P) \\ f_y(P) \end{pmatrix} \right|^{-1} = |h| \cdot \left| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \bullet d \right| \cdot (f_x(P)^2 + f_y(P)^2)^{-1/2}.$$

Ein Vergleich der beiden Näherungen für φ gibt

$$|h| \cdot |d| \cdot r^{-1} \approx |h| \cdot \left| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \bullet d \right| \cdot (f_x(P)^2 + f_y(P)^2)^{-1/2}$$

In der Grenze für $h \rightarrow 0$ ergibt sich

$$|d| \cdot r^{-1} = \left| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \bullet d \right| \cdot (f_x(P)^2 + f_y(P)^2)^{-1}$$

Mithin ist

$$r^{-1} = \left| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \bullet d \right| \cdot (f_x(P)^2 + f_y(P)^2)^{-3/2}.$$

Nun setzen wir ein. Es wird

$$\begin{aligned} \xi &= \nabla(f_x)(P) \bullet d = \begin{pmatrix} f_{xx}(P) \\ f_{xy}(P) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} f_y(P) \\ -f_x(P) \end{pmatrix} = (f_{xx} \cdot f_y - f_{xy} \cdot f_x)(P) \\ \eta &= \nabla(f_y)(P) \bullet d = \begin{pmatrix} f_{yx}(P) \\ f_{yy}(P) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} f_y(P) \\ -f_x(P) \end{pmatrix} = (f_{yx} \cdot f_y - f_{yy} \cdot f_x)(P). \end{aligned}$$

Somit wird

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \bullet d &= \begin{pmatrix} (f_{xx} \cdot f_y - f_{xy} \cdot f_x)(P) \\ (f_{yx} \cdot f_y - f_{yy} \cdot f_x)(P) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} f_y(P) \\ -f_x(P) \end{pmatrix} \\ &= (f_{xx} \cdot f_y^2 - f_{xy} \cdot f_x \cdot f_y - f_{yx} \cdot f_y \cdot f_x + f_{yy} \cdot f_x^2)(P) \\ &= ((f_y - f_x) \cdot \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix})(P) \\ &= ((f_y - f_x) \cdot \text{Hf} \cdot \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \end{pmatrix})(P). \end{aligned}$$

Einsetzen gibt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(f_x(P)^2 + f_y(P)^2)^{3/2}} \cdot \left| \begin{pmatrix} f_y(P) & -f_x(P) \end{pmatrix} \cdot \text{Hf}(P) \cdot \begin{pmatrix} f_y(P) \\ -f_x(P) \end{pmatrix} \right|.$$

□

Beispiel 49 Wir betrachten wieder die von

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

beschriebene Ellipse, wobei $a, b > 0$; cf. Beispiel 46.

Es ist also

$$\begin{aligned} f &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \\ \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \end{pmatrix} \\ \text{Hf} &= \begin{pmatrix} 2/a^2 & 0 \\ 0 & 2/b^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten an der Stelle $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Ellipse:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{((2x/a^2)^2 + (2y/b^2)^2)^{3/2}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 2y/b^2 & -2x/a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/a^2 & 0 \\ 0 & 2/b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y/b^2 \\ -2x/a^2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{(4x^2/a^4 + 4y^2/b^4)^{3/2}} \cdot \left(\frac{8y^2}{b^4 a^2} + \frac{8x^2}{a^4 b^2} \right) \\ &= \frac{1}{(4x^2/a^4 + 4y^2/b^4)^{3/2}} \cdot \left(\frac{8y^2}{b^4 a^2} + \frac{8x^2}{a^4 b^2} \right) \end{aligned}$$

Also ist im Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ der Radius bestimmt durch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(4a^2/a^4)^{3/2}} \cdot \frac{8a^2}{a^4b^2} = \frac{1}{8/a^3} \cdot \frac{8}{a^2b^2} = \frac{a}{b^2},$$

i.e. $r = \frac{b^2}{a}$.

Ferner ist im Punkt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ der Radius bestimmt durch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(4b^2/b^4)^{3/2}} \cdot \frac{8b^2}{b^4a^2} = \frac{1}{8/b^3} \cdot \frac{8}{b^2a^2} = \frac{b}{a^2},$$

i.e. $r = \frac{a^2}{b}$.

Dies stimmt mit dem Resultat aus Beispiel 46 überein.

Beispiel 50 Wir greifen Beispiel 47 wieder auf.

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.

Ihr Graph ist die Nullstellenmenge K von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) := y - g(x)$.

Es ist

$$\begin{aligned} f_x &= -g'(x) \\ f_y &= 1 \\ f_{xx} &= -g''(x) \\ f_{xy} &= 0 \\ f_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $Hf = \begin{pmatrix} -g''(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

An der Stelle $P = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$ erhalten wir also

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(g'(x)^2 + 1)^{3/2}} \cdot |g''(x)|,$$

i.e. $r = (1 + g'(x))^3/2 \cdot |g''(x)|^{-1}$. Dies stimmt mit dem Resultat aus Beispiel 47 überein.

Beispiel 51 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y^2 + y - x^3 - x^2$.

Sei K die Nullstellenmenge von f .

Es ist

$$\begin{aligned} f_x &= -3x^2 - 2x \\ f_y &= 2y + 1 \\ f_{xx} &= -6x - 2 \\ f_{xy} &= 0 \\ f_{yy} &= 2. \end{aligned}$$

Also ist $Hf = \begin{pmatrix} -6x-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

An der Stelle $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K$ erhalten wir also

$$\frac{1}{r} = ((-3x^2 - 2x)^2 + (2y + 1)^2)^{-3/2} \cdot |(2y + 1)^2 \cdot (-6x - 2) + (-3x^2 - 2x)^2 \cdot 2|.$$

Z.B. wird an der Stelle $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K$

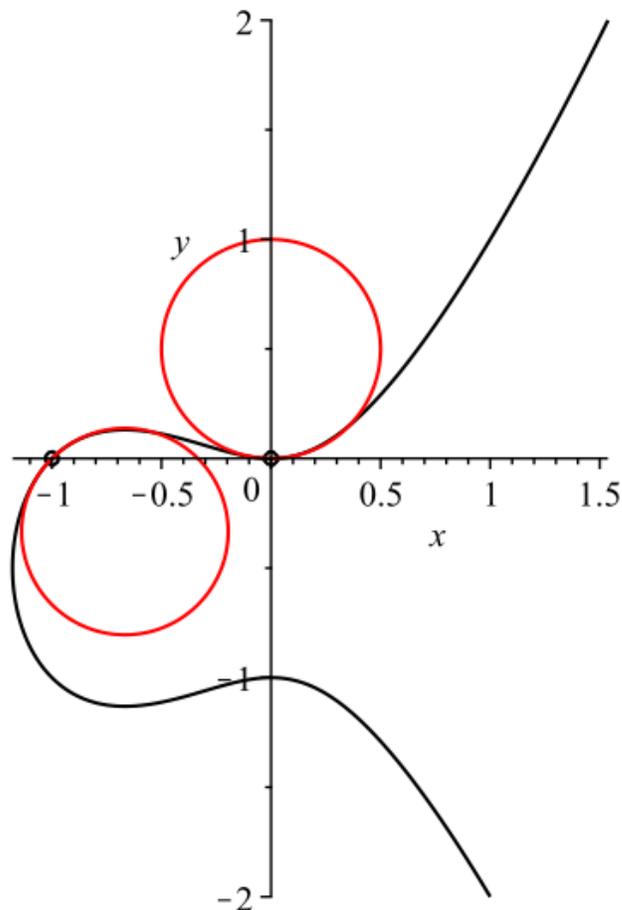
$$\frac{1}{r} = 1^{-3/2} \cdot |1 \cdot (-2) + 0| = 2,$$

also $r = 1/2$.

Z.B. wird an der Stelle $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in K$

$$\frac{1}{r} = (1 + 1)^{-3/2} \cdot |1 \cdot 4 + 1 \cdot 2| = 3 \cdot 2^{-1/2},$$

also $r = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0,471$.



Anhang A

Aufgaben und Lösungen

A.1 Aufgaben

Aufgabe 1 Sei $n \geq 1$. Seien $B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- (1) Formen wir B mittels Zeilenumformungen zu einer Matrix \tilde{B} um, so gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $SB = \tilde{B}$.
- (2) Wir stehen vor der Aufgabe, eine Basis des Kerns von BC zu bestimmen, d.h. eine Basis des Lösungsraums des homogenen LGS zu BC .

Man begründe: Es ist der Kern von BC gleich dem Kern von $\tilde{B}C$.

Wir dürfen also im Produkt BC die bereits umgeformte Matrix \tilde{B} an die Stelle von B treten lassen. Hierbei dürfen noch Nullzeilen von \tilde{B} weggelassen werden.

Aufgabe 2

Wir betrachten jeweils folgende Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- (1) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (2) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (3) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für jede dieser Matrizen bearbeite man die folgenden Fragen.

- (i) Man bestimme das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$.
- (ii) Man bestimme die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von A samt algebraischer Vielfachheit.
- (iii) Für jeden Eigenwert λ_k von A bestimme man eine Basis von $\text{Kern}(A_{(k)})$, ergänze diese zu einer Basis von $\text{Kern}(A_{(k)}^2)$, ergänze diese zu einer Basis von $\text{Kern}(A_{(k)}^3)$, usf.
 Für welchen Exponent $s \geq 1$ ist $\text{Kern}(A_{(k)}^s) = \text{Kern}(A_{(k)}^{s+1})$?
 Welche der oben bestimmten Basen ist eine Basis des Hauptraums $H_A(\lambda_1)$.
- (iv) Man bestimme eine Jordanbasis von \mathbb{C}^n für A , d.h. eine Basis, die aus Hauptvektorketten von A besteht.
- (v) Man bestimme eine Matrix S derart, daß $J := S^{-1}AS$ in Jordanform ist.
 Man gebe J an.
- (vi) Man bestimme J^n für $n \geq 0$.
- (vii) Man bestimme $\exp(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J^n$.
- (viii) Man bestimme $\exp(A) = S \exp(J) S^{-1}$.

A.2 Lösungen

Aufgabe 1

(1) Es entspricht die Addition des λ -fachen der Zeile Nummer i zur Zeile Nummer j der Multiplikation mit der Matrix, die aus der Einheitsmatrix durch Setzen des Eintrags an Position (j, i) zu λ entsteht.

Es entspricht Vertauschung der Zeile mit Nummer i und der Zeile mit Nummer j der Multiplikation von links mit der Matrix, die aus der Einheitsmatrix durch Vertauschung der Zeilen mit diesen Nummern entsteht.

Hierbei seien $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$, und $\lambda \in \mathbb{C}$.

Entsteht also \tilde{B} aus Zeilenumformungen aus B , so können wir jede dieser Umformungen als Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links schreiben. Ist S das Produkt dieser Matrizen (in der verwendeten Reihenfolge von rechts nach links), dann ist $\tilde{B} = SB$.

(2) Sei $\tilde{B} = SB$ mit einer invertierbaren Matrix wie in (1).

Für $x \in \mathbb{C}^n$ ist dann $\tilde{B}Cx = 0$ genau dann, wenn $SBCx = 0$ ist, also genau dann, wenn $BCx = 0$ ist.

Also ist $\text{Kern}(BC) = \text{Kern}(\tilde{B}C)$.

Aufgabe 2

Zu (1).

(i) Es ist $\chi_A(t) = -(t-1)^3$.

(ii) Wir haben den Eigenwert $\lambda_1 = 1$, mit algebraischer Vielfachheit 3.

(iii) Zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

Es ist $A_{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zeilenvereinfachung und Streichen von Nullzeilen gibt $B := (1 \ 0 \ -1)$. Also ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,2}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$.

Es wird $B \cdot A_{(1)} = (0 \ 0 \ 0)$. Also können wir ergänzen zu einer Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{2,1}}$$

von $\text{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist 3. Also ist $\dim H_A(\lambda_1) = 3$.

Somit ist $\text{Kern}(A_{(1)}^2) = \text{Kern}(A_{(1)}^{2+1})$ und auch $\text{Kern}(A_{(1)}^2) = H_A(\lambda_1)$.

Folglich ist diese Basis auch eine Basis von $H_A(\lambda_1)$.

(iv) Zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$.

Wir haben aus (iii) die Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{1,2}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}}$$

von $H_A(\lambda_1)$ vorliegen.

Sei $y_{2,1} := x_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es wird $A_{(1)}y_{2,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ersetzen wir in obiger Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$ den Vektor $x_{1,2}$ durch den Vektor $A_{(1)}y_{2,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir die Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{Ay_{2,1}}$$

von $\text{Kern}(A_{(1)})$.

Sei $y_{1,1} := x_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten insgesamt folgende aus Hauptvektorketten bestehende Jordanbasis von \mathbb{C}^3 für A .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{Ay_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_{2,1}}$$

(v) Mit $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ wird $J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(vi) Mit Induktion wird $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $n \geq 0$.

(vii) Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$.

Es wird $\exp(J) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(viii) Es wird $\exp(A) = S \exp(J) S^{-1} = e \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Zu (2).

(i) Es ist $\chi_A(t) = -(t+1)^2(t-2)^3$.

(ii) Wir haben die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, mit algebraischer Vielfachheit 2, und $\lambda_2 = 2$, mit algebraischer Vielfachheit 3.

(iii) Zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

$$\text{Es ist } A_{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeilenvereinfachung und Streichen von Nullzeilen gibt $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,1}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$.

$$\text{Es ist } B \cdot A_{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeilenvereinfachung und Streichen von Nullzeilen gibt $C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also können wir ergänzen zu einer Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{2,1}}$$

von $\text{Kern}(A_{(1)}^2)$.

Die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist 2. Also ist $\dim H_A(\lambda_1) = 2$.

Somit ist $\text{Kern}(A_{(1)}^2) = \text{Kern}(A_{(1)}^{2+1})$ und auch $\text{Kern}(A_{(1)}^2) = H_A(\lambda_1)$.

Folglich ist diese Basis auch eine Basis von $H_A(\lambda_1)$.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

$$\text{Es ist } A_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeilenvereinfachung und Streichen von Nullzeilen gibt $B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x'_{1,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: x'_{1,2}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(2)})$.

$$\text{Es ist } B' \cdot A_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zeilenvereinfachung und Streichen von Nullzeilen gibt $C' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Also können wir ergänzen zu einer Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x'_{2,1}}$$

von $\text{Kern}(A_{(2)}^2)$.

Die algebraische Vielfachheit von λ_2 ist 3. Also ist $\dim H_A(\lambda_2) = 3$.

Somit ist $\text{Kern}(A_{(2)}^2) = \text{Kern}(A_{(2)}^{2+1})$ und auch $\text{Kern}(A_{(2)}^2) = H_A(\lambda_2)$.

Folglich ist diese Basis auch eine Basis von $H_A(\lambda_2)$.

(iv) Zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

Wir haben aus (iii) die Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{2,1}}$$

von $H_A(\lambda_1)$ vorliegen.

$$\text{Sei } y_{2,1} := x_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Es wird } A_{(1)}y_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ersetzen wir in obiger Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$ den Vektor $x_{1,1}$ durch den Vektor $A_{(1)}y_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhalten wir die Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(1)}y_{2,1}}$$

von $\text{Kern}(A_{(1)})$.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

Wir haben aus (iii) die Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x'_{1,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x'_{1,2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x'_{2,1}}$$

von $H_A(\lambda_2)$ vorliegen.

Sei $y'_{2,1} := x'_{2,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es wird $A_{(2)}y'_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ersetzen wir in obiger Basis von $\text{Kern}(A_{(2)})$ den Vektor $x_{1,1}$ durch den Vektor $A_{(2)}y'_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir die Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y'_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x'_{1,2}}$$

Sei $y'_{1,1} := x'_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten insgesamt folgende aus Hauptvektorketten bestehende Jordanbasis von \mathbb{C}^5 für A .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(1)}y_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y'_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y'_{2,1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y'_{1,1}}$$

(v) Mit $S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird $J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(vi) Mit Induktion wird $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n \cdot (-1)^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & n \cdot 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

(vii) Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$. Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-1}$. Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = e^{-1}$.
Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$. Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} = e^2$.

Es wird

$$\exp(J) = \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

(viii) Es wird

$$\exp(A) = S \exp(J) S^{-1} = \begin{pmatrix} e^2 & e^{-1} - e^2 & 0 & 0 & -e^{-1} + e^2 \\ e^2 & e^{-1} - e^2 & 0 & 0 & -e^{-1} + e^2 \\ e^{-1} & -2e^{-1} & e^{-1} & -e^{-1} + e^2 & 2e^{-1} \\ e^2 & -e^2 & 0 & e^2 & e^2 \\ e^2 & -e^2 & 0 & 0 & 2e^2 \end{pmatrix}.$$

Zu (3).

(i) Es ist $\chi_A(t) = -(t-2)(t-1)^4$.

(ii) Wir haben die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, mit algebraischer Vielfachheit 1, und $\lambda_2 = 1$, mit algebraischer Vielfachheit 4.

(iii) Zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

$$\text{Es ist } A_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeilenvereinfachung und Streichen von Nullzeilen gibt $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x_{1,1}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(1)})$.

Die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist 1. Also ist $\dim H_A(\lambda_1) = 1$.

Somit ist $\text{Kern}(A_{(1)}^1) = \text{Kern}(A_{(1)}^{1+1})$ und auch $\text{Kern}(A_{(1)}) = H_A(\lambda_1)$.

Folglich ist diese Basis auch eine Basis von $H_A(\lambda_1)$.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$.

$$\text{Es ist } A_{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeilenvereinfachung und Streichen von Nullzeilen gibt $B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x'_{1,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: x'_{1,2}}$$

eine Basis von $\text{Kern}(A_{(2)})$.

$$\text{Es ist } B' \cdot A_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeilenvereinfachung und Streichen von Nullzeilen gibt $C' := (1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0)$. Also können wir ergänzen zu einer Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: x'_{2,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: x'_{2,2}}$$

von $\text{Kern}(A_{(2)})$.

Die algebraische Vielfachheit von λ_2 ist 4. Also ist $\dim H_A(\lambda_2) = 4$.

Somit ist $\text{Kern}(A_{(2)}^2) = \text{Kern}(A_{(2)}^{2+1})$ und auch $\text{Kern}(A_{(2)}^2) = H_A(\lambda_2)$.

Folglich ist diese Basis auch eine Basis von $H_A(\lambda_2)$.

(iv) Zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Wir haben aus (iii) die Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{1,1}}$$

von $H_A(\lambda_1)$ vorliegen.

Sei $y_{1,1} := x_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$.

Wir haben aus (iii) die Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x'_{1,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x'_{1,2}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x'_{2,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x'_{2,2}}$$

von $H_A(\lambda_2)$ vorliegen.

Sei $y'_{2,1} := x'_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es wird $A_{(2)}y'_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sei $y'_{2,2} := x'_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es wird $A_{(2)}y'_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ersetzen wir in obiger Basis von $\text{Kern}(A_{(2)})$ die Vektoren $x_{1,1}$ und $x_{1,2}$ durch den Vektor

$A_{(2)}y'_{2,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $A_{(2)}y'_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so erhalten wir die Basis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y'_{2,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y'_{2,2}}$$

von $\text{Kern}(A_{(2)})$.

Wir erhalten insgesamt folgende aus Hauptvektorketten bestehende Jordanbasis von \mathbb{C}^5 für A .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y_{1,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y'_{2,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y'_{2,1}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{A_{(2)}y'_{2,2}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{y'_{2,2}}$$

(v) Mit $S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird $J := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(vi) Mit Induktion wird $J^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(vii) Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$. Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. Es ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$.

Es wird $\exp(J) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

(viii) Es wird

$$\exp(A) = S \exp(J) S^{-1} = \begin{pmatrix} 3e & -2e & e & e & 0 \\ -e & 3e & -e & -e & -e \\ e^2 - 4e & -e^2 + 5e & e^2 - 2e & -2e & -e \\ -e^2 - 2e & e^2 + 3e & -e^2 - e & -e & -e \\ -2e & -2e & e & e & e \end{pmatrix}.$$