M. Künzer Abgabe bis Do 25.07.2024 im Ilias oder in V57.8.126

Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 12

Hausaufgabe 45 Wir arbeiten in der Kategorie $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/81$-Mod. Wir betrachten die kurz exakte Sequenz $\mathbb{Z}/3 \xrightarrow{9} \mathbb{Z}/27 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/9$.

(1) Man löse $\mathbb{Z}/3$ und $\mathbb{Z}/9$ injektiv auf. Man bilde damit und mit der betrachteten Sequenz ein Hufeisendiagramm, d.h. man finde eine punktweise split kurz exakte Sequenz von injektiven Auflösungen, die unter H^0 auf eine Sequenz isomorph zur betrachteten abgebildet werden.

(2) Man berechne für die betrachtete kurz exakte Sequenz die lang exakte $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}/81}(\mathbb{Z}/9, -)$-Sequenz im Bereich $* \leqslant 2$ bis auf Isomorphie.

Dabei berechne man die Konnektoren nicht, sondern bestimme alle an diesen Stellen in Frage kommenden Morphismen, für welche die Sequenz lang exakt wird.

Hausaufgabe 46 Man zeige oder widerlege.
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend Injektiven. Sei R ein Ring.

(1) Sei $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ projektiv. Sei $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Es ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(P, Y) \simeq 0$ für $k \geqslant 0$.

(2) Sei $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ projektiv. Sei $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Es ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(P, Y) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.

(3) Sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Sei $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ injektiv. Es ist $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X, I) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.

(4) Sei $M \in \mathrm{Ob}\, R$-Mod. Es ist $\mathrm{Tor}^R_k(R, M) \simeq 0$ für $k \geqslant 1$.

Hausaufgabe 47

(1) Man interpretiere Hausaufgabe 42 als Berechnung des Bildes eines Morphismus nach Anwendung eines rechtsabgeleiteten Funktors, bis auf Isomorphie.

(2) Aus dem Ergebnis läßt sich ein Morphismus in einer lang exakten R^*F-Sequenz als epimorph erkennen. Welcher?

(3) Aus dem Ergebnis läßt sich ein Morphismus in einer lang exakten R^*F-Sequenz als monomorph erkennen. Welcher?

Hausaufgabe 48

(1) Man berechne $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}/27}_k(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3)$ für $k \geqslant 0$ bis auf Isomorphie.

(2) Man bestimme ein $k \geqslant 0$ mit $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}/27}_k(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3) \not\simeq 0$, aber $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_k(\mathbb{Z}/9, \mathbb{Z}/3) \simeq 0$.