Homologische Algebra, SoSe 24

Blatt 11

Hausaufgabe 41 (A61) Man zeige oder widerlege.
Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

(1) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind zwei der Komplexe X', X, X'' azyklisch, so auch der dritte.

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Sind X und Y azyklisch, so auch I_f .

Hausaufgabe 42 Wir arbeiten in $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/27$-Mod.

(1) Man löse den Morphismus $\mathbb{Z}/9 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}/3$ injektiv auf, um einen Komplexmorphismus $I \xrightarrow{g} J$ zu erhalten.

(2) Sei $F := {}_{\mathbb{Z}/27}(\mathbb{Z}/9, -) : \mathbb{Z}/27\text{-Mod} \to \mathbb{Z}/9\text{-Mod}$.
Man berechne $F(I \xrightarrow{g} J)$ bis auf Isomorphie.

(3) Man berechne $(\mathrm{H}^2 \circ F)(I \xrightarrow{g} J)$ bis auf Isomorphie.

Hausaufgabe 43 (A56) Seien $\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(1) Man zeige die Äquivalenz von (i) und (ii).

(i) Es sind ${}_{\mathcal{B}}(F(-), =)$ und ${}_{\mathcal{A}}(-, G(=))$ isomorphe Funktoren von $\mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B}$ nach (Sets).

(ii) Es gibt Transformationen $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\varepsilon} G \circ F$ und $F \circ G \xrightarrow{\eta} \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ mit $(F\varepsilon X)(\eta F X) = 1_{FX}$ für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ und $(\varepsilon GY)(G\eta Y) = 1_{GY}$ für $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$.

Gelten (i, ii), so heißt F *linksadjungiert* zu G, und G *rechtsadjungiert* zu F, geschrieben $F \dashv G$. Es heißt ε eine *Einheit* und η eine *Coeinheit* dieser Adjunktion.

(2) Sei $G \circ F \simeq 1$ und $F \circ G \simeq 1$. Man zeige: $F \dashv G$.

(3) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additiv. Sei $F \dashv G$. Man zeige, daß F additiv ist.

(4) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsch. Sei $F \dashv G$. Man zeige, daß F rechtsexakt ist.

Hausaufgabe 44 (A51) Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, in der sich das folgende abspiele.
Man zeige.

(1) Sei $X' \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} X''$ eine kurz exakte Sequenz, und sei i eine Coretraktion. Dann ist diese kurz exakte Sequenz isomorph zu $X' \xrightarrow{(1\,0)} X' \oplus X'' \xrightarrow{\binom{0}{1}} X''$ vermöge eines Isomorphismus der Form $(1_{X'}, a, 1_{X''})$.

(2) Sei $V \xrightarrow{m} U$ eine Coretraktion in $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Ist U azyklisch, so auch V. Ist U split azyklisch, so auch V.

(3) Seien V, $V' \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Es ist $V \oplus V'$ genau dann split azyklisch, wenn V und V' dies sind.